Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen i MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere
LØSNINGSFORSLAG

Tirsdag 14. desember 2010

Hjelpemidler:
Kode C: Ett håndskrevet gult A4-ark stemplet Institutt for matematiske fag, Rottmann; Matematisk formelsamling, og enkel, bestemt kalkulator.

Oppgave 1 La funksjonen $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}x$ være definert for $x \in [0, 3]$.

a) Funksjonen er definert på et lukket intervall, så den har globale minimums- og maksimumspunkt som enten er kritiske punkt eller endepunkt for intervallet.

Finner først de kritiske punktene; der den deriverte er lik null eller ikke eksisterer. Siden f er en kontinuerlig funksjon er den deriverte til f definert på hele intervallet. Vi deriverer og setter lik null:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} &= 0 \\ x+1 &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vi har altså et kritiske punkt, $x = 1$. Vi sammenligner funksjonsverdien i det kritiske punktet og de to endepunktene for å finne de globale ekstremalpunktene:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.19 \\ f(0) &= \ln 1 - 0 = 0 \\ f(3) &= \ln 4 - \frac{3}{2} \approx -0.11 \end{aligned}$$

Funksjonen har globalt minimumspunkt for $x = 3$ og globalt maksimumspunkt for $x = 1$.

b) Fra a) vet vi at $f(1) > 0$ og $f(3) < 0$, det vil si at f skifter fortegn på intervallet $(1, 3)$. Siden f er en kontinuerlig funksjon, følger det derfor av skjæringssetningen at funksjonen må ha *minst* ett nullpunkt på intervallet $(1, 3)$.

For å vise at funksjonen har *nøyaktig* ett nullpunkt på intervallet, må vi se på den deriverte

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}.$$

For $x \in (1, 3)$ så vil alltid $f'(x) < 0$. Det vil si at $f(x)$ er en strengt synkende funksjon på dette intervallet, og kan derfor ikke skjære x-aksen mer enn en gang.

Vi har dermed vist at funksjonen har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $(1, 3)$.
(Det er flere måter man kan vise dette på, men man må alltid argumentere både for at det fins ett nullpunkt og at det ikke kan være flere.)

c) Vi setter opp Newtons metode for vårt problem:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n + 1) - \frac{1}{2}x_n}{\frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{2}}$$

Vi vet fra b) at nullpunktet ligger i intervallet $(1, 3)$, og velger derfor $x_0 = 2$ som startverdi. Vi finner da at:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= x_0 - \frac{\ln(x_0 + 1) - \frac{1}{2}x_0}{\frac{1}{x_0+1} - \frac{1}{2}} = 2.591673734 \\
x_2 &= x_1 - \frac{\ln(x_1 + 1) - \frac{1}{2}x_1}{\frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{2}} = 2.513965068 \\
x_3 &= x_2 - \frac{\ln(x_2 + 1) - \frac{1}{2}x_2}{\frac{1}{x_2+1} - \frac{1}{2}} = 2.512862646
\end{aligned}$$

Vi har altså at $x = 2.51$ er en tilnærming med to riktige desimaler for nullpunktet til $f(x)$.

Oppgave 2

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{1+y} \\
\int \frac{1+y}{y}\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\
\int \left(\frac{1}{y} + 1\right)\mathrm{d}y &= \int 1\mathrm{d}x \\
\ln|y| + y &= x + C
\end{aligned}$$

Siden $y > 0$, blir den generelle løsningen av differensialligningen, gitt på implisitt form,

$$\ln y + y = x + C$$

.

Oppgave 3 Vi skal for $t \geq 1$ se på initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{y}{t} \quad \text{for } y(1) = 1.$$

a) Vi har $t_0 = 1$ og $y_0 = 1$. Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ blir for dette problemet:

$$t_{n+1} = t_n + 0.1 \qquad y_{n+1} = y_n + 0.1\left(1 - \frac{y_n}{t_n}\right)$$

For å finne en tilnærming for $y(1.5)$ må vi ta fem skritt med Eulers metode:

$$\begin{array}{ll}
t_0 = 1 & y_0 = 1 \\
t_1 = 1.1 & y_1 = y_0 + 0.1\left(1 - \dfrac{y_0}{t_0}\right) = 1 \\
t_2 = 1.2 & y_2 = y_1 + 0.1\left(1 - \dfrac{y_1}{t_1}\right) = 1.00909 \\
t_3 = 1.3 & y_3 = y_2 + 0.1\left(1 - \dfrac{y_2}{t_2}\right) = 1.02500 \\
t_4 = 1.4 & y_4 = y_3 + 0.1\left(1 - \dfrac{y_3}{t_3}\right) = 1.04615 \\
t_5 = 1.5 & y_5 = y_4 + 0.1\left(1 - \dfrac{y_4}{t_4}\right) = 1.07143
\end{array}$$

Vi finner at $y_5 = 1.07143$ er en tilnærmet verdi for $y(1.5)$.

b) For å vise at den generelle løsningen av differensialligningen er

$$y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{C}{t}$$

setter vi inn for y og y' på venstre og høyre side:

$$\begin{array}{rl}
\text{venstre side:} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{t^2} \\
\text{høyre side:} & 1 - \dfrac{y}{t} = 1 - \dfrac{\frac{1}{2}t + \frac{C}{t}}{t} = 1 - (\dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{t^2}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{t^2}
\end{array}$$

Siden vi får det samme på venstre og høyre side, er dette den generelle løsningen av differensialligningen. For å bestemme partikulærløsningen for intitialverdiproblemet vårt, bruker vi $y(1) = 1$ til å bestemme C:

$$1 = y(1) = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Partikulærløsningen er altså $y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$ og den eksakte verdien når $t = 1.5$ blir

$$y(1.5) = \frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{2 \cdot 1.5} \approx 1.08333$$

Vi ser at feilen for tilnærmingen vi fant i a) er omlag 0.012, som er en ganske god tilnærming. Ønsker man en bedre tilnærming, må man bruke en mindre h eller en mer effektiv metode, søm for eksempel modifisert Eulers metode.

Oppgave 4 Her må vi først bruke substitusjon med $u = x^2 + 2$, legg merke til at da er $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ og $x^2 = u - 2$, deretter delvis integrasjon. (Denne var ment å være "nøtten" i dette eksamenssettet.)

$$\begin{aligned}
\int 2x^3 \cos(x^2+2)\mathrm{d}x &= \int x^2 \cos u (2x\,\mathrm{d}x) = \int (u-2)\cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \int u \cos u\,\mathrm{d}u - 2\int \cos u\,\mathrm{d}u \\
&= u\sin u - \int 1 \sin u \mathrm{d}u - 2\sin u \\
&= u \sin u - (-\cos u) - 2\sin u = \cos u + (u-2)\sin u \\
&= \cos(x^2+2) + x^2 \sin(x^2+2)
\end{aligned}$$

Oppgave 5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 11 & 25 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Løsningen av systemet er altså $x = 3, y = 2, z = 1$.

Oppgave 6 Vi har to lineære transformasjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$:

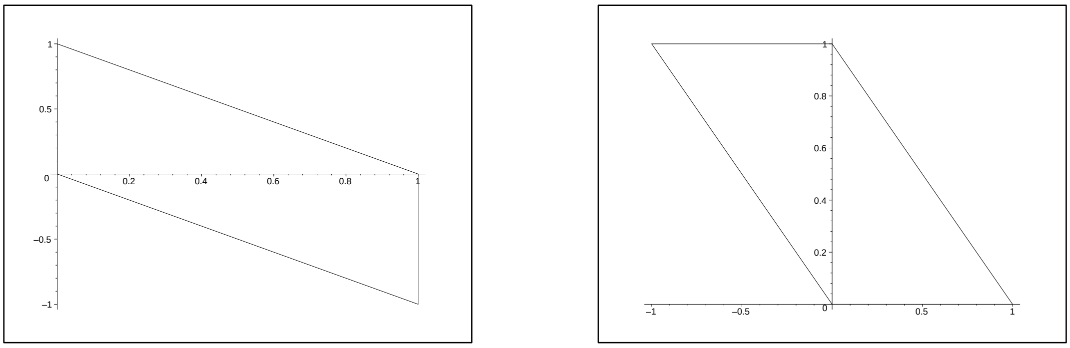
$$T_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Siden T_1 og T_2 er lineære, vet vi at de transformerer linjer til linjer (punkt), og trenger bare sjekke hva som skjer med hjørnene av enhetskvadratet under transformasjonene. Merk at vi alltid har $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

$$T_1\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \qquad T_2\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$T_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad T_2\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$T_1\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad T_2\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$



(a) T_1

(b) T_2

Figur 1: Transformasjonene av enhetskvadratet

b) Vi har

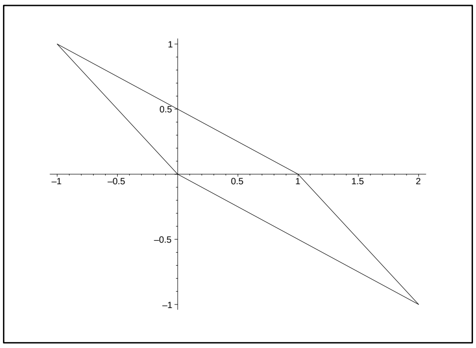
$$T_3(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x})) = A_2A_1\mathbf{x}$$

Matrisen A_3 slik at $T_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x}$ er altså A_2A_1:

$$A_3 = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

For hjørnene i enhetskvadratet finner vi:

$$T_3\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$
$$T_3\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$
$$T_3\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$



Figur 2: T_3 brukt på enhetskvadratet