Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
~~Ola Nordmann~~ ~~(99 99 99 99)~~ 91753
Magnus B. Landstad
Rettet av Per Hag

Brukerkurs i Matematikk for Informatikere (MA0003)

Fredag 21. mai 2010
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 11. juni 2010

Hjelpemidler:
Bestemt enkel kalkulator, og ett gult A4-ark stemplet "Institutt for Matematiske Fag".

Oppgavesettet består av oppgavene 1-5 som alle skal besvares. Dessuten skal en og bare en av oppgavene 6 og 7 besvares. Svares det på begge regnes oppgave 6 som tellende.

Oppgaver med løsning!

Oppgave 1 Hva er den deriverte til $g(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ i $t = \ln 2$?

Løsning:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}}$$

Oppgave 2 La $f(x) = x^3 - 3x + 3$ med $D_f = [-3, 2]$.

a) Finn alle x der grafen for f har horisontal tangent.

b) Finn maksimum og minimum av f.

c) f har presis ett nullpunkt. Finn en tilnærmet verdi for dette ved å utføre 3 skritt med Newtons metode med startgjett $x_0 = -2$.

d) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(0) = 3$$

Løsning: Punkt a: f har horisontal tangent der den deriverte er 0. Siden

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$$

inntreffer dette når $x = \pm 1$.

Punkt b: Ekstrema finnes i kritiske punkter. f har kritiske punkter i endepunktene $x = -3$ og $x = 2$ og i $x = \pm 1$ der den deriverte er null. Siden

$$f(-3) = -15, \; f(-1) = 5, \; f(1) = 1, \; f(2) = 5$$

har vi maksimumverdi 5 i $x = -1$ og $x = 2$ og minimumverdi -15 i $x = -3$.

Punkt c: Vi benytter newtons metode med $x_0 = -2$ og beregner 3 suksessive approksimasjoner ved hjelp av formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 3}{3x_n^2 - 3} = \frac{2x_n^3 - 3}{3x_n^2 - 3}.$$

Dette gir oss $x_1 = -2,1111$, $x_2 = -2,1038$, $x_3 = -2,1037$.

Punkt d: Når $\frac{dy}{dx} = f(x)$ er $y = \int f(x)\,dx$. Vi beregner derfor

$$y = \int f(x)\,dx = \int x^3 - 3x + 3\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 3x + C.$$

Siden $y(0) = 3$ ser vi enkelt at $C = 3$ og løsningen av initialverdiproblemet blir da

$$\underline{\underline{y = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 3.}}$$

Oppgave 3 Løs det ubestemte integralet

$$\int x(x^2 + 1)^{2010}\,dx$$

Løsning: Vi setter $u = x^2+1$ og får da $x\,dx = \frac{1}{2}du$. Substituerer vi dette inn i vårt ubestemte integral ender vi opp med

$$\int x(x^2+1)^{2010}\,dx = \int \frac{1}{2}u^{2010}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2011}u^{2011} + C = \frac{1}{4022}(x^2+1)^{2011} + C$$

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Finns det en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *ikke* har noen løsning? Husk å begrunne svaret ditt.

Løsning: Punkt a: Vi løser problemet ved rekkeoperasjoner på den augmenterte matrisen $[A|\mathbf{b}]$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \overset{R3-R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{R1-R3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R2-2R1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{R1+R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Dette gir oss løsningen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Punkt b: Nei, siden $A \sim I$.

Oppgave 5 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineærtransformasjon der

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Regn ut

$$T(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}).$$

Løsning:

$$
\begin{aligned}
T(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}) &= T(3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\
&= 3T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + 4T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\
&= 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Det skal svares på en og bare en av oppgavene 6 og 7.

Oppgave 6 Ta ett skritt med Eulers metode av lengde $h = 1$ og ett skritt med modifisert Euler av lengde $h = 2$ på initialverdiproblemet

$$y' = \sqrt{x+y}, \quad y(2) = 2$$

Begge skrittene startes i initialpunktet $y(2) = 2$.

Løsning: Resultatet (x_1, y_1) af ett skritt med Eulers metode med skrittlengde $h = 1$ er gitt ved

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_0 + h \cdot y'(x_0, y_0)) = (2 + 1, 2 + 1 \cdot \sqrt{2+2}) = (3, 4)$$

Hermed blir resultatet (x_1', y_1') av ett skritt med modifisert Euler av lengde $h' = 2h = 2$ lik:

$$(x_1', y_1') = (x_0 + h, y_0 + h \cdot y'(x_1, y_1)) = (2 + 2, 2 + 2 \cdot \sqrt{3+4}) = (4, 2 + 2\sqrt{7})$$

Oppgave 7 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn alle løsninger av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Løsning: Vi utnytter linearitet slik at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} = I\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - I)\mathbf{x} = 0$$

Med andre ord skal vi løse $[A - I|0] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. En ser direkte av dette at alle løsninger er gitt ved $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$ med $t \in]-\infty, \infty[$.