Ex: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 3x = -2$$

Husk: $(x-a)^2 = x - 2a + a^2$

$$x^2 - 3x = \underbrace{x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2}_{\text{dette er et kvadrat, nemlig } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$x - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$x = 2 \quad \text{eller} \quad x = 1$$

NB! Dette "trikset" kan brukes til å finne en generell formel for løsning av $ax^2 + bx + c = 0$

(Husk: løsningene er $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)

Funksjoner

Først, helt generelt:

Gitt to mengder X og Y, en funksjon $f: X \to Y$

er en regel som tilordner nøyaktig ett element i Y,

til hvert element i X, notasjon: x tilordnes $f(x)$.

Eks:

$$X = \{\text{studenter i MA0003}\}$$

$$Y = \{\text{årstall}\}$$

$f(x)$ er fødselsåret til person x.

I dette kurset: X og Y er nesten alltid delmengder av $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ - de reelle tall

$\cup\!\mid$

$\mathbb{Q}$ - de rasjonale tall

$\cup\!\mid$

$\mathbb{Z}$ - heltall

$\cup\!\mid$

$\mathbb{N}$ - naturlige tall

Intervaller i $\mathbb{R}$

$a \leq b$ reelle tall

$$(a,b) \subseteq [a,b) \subseteq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$$

$$(a,b) \subseteq (a,b] \subseteq [a,b]$$

Ex: $f(x) = x^2$

Kan f.eks. velge $X = Y = \mathbb{N}$

eller $X = Y = \mathbb{R}$

eller $X = \mathbb{N}$ og $Y = \mathbb{R}$ (men ikke $X = \mathbb{R}$ og $Y = \mathbb{N}$)

eller $X = \mathbb{R}$ og $Y = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.

Kaller ofte X for definisjonsmengden - D_f

Y kalles billedmengden.

Bildet til f er alle elementer i Y som forekommer som funksjonsverdier $f(x)$.

Ex: Bildet til $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

er $[0, \infty)$

Ex $f(x) = \frac{1}{x}$

$X = D_f$ kan være $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Da er bildet også $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>Grafen til en funksjon</u>

Gitt en funksjon $f: X \to Y$, kar vi mengden av par

$\{(x, f(x))\}$ kalles grafen til f.

Denne kan ofte fremstilles "grafisk":

Eks

$X = \{\text{Anne}, \text{Bernt}, \text{Cato}, \text{Dina}\}$

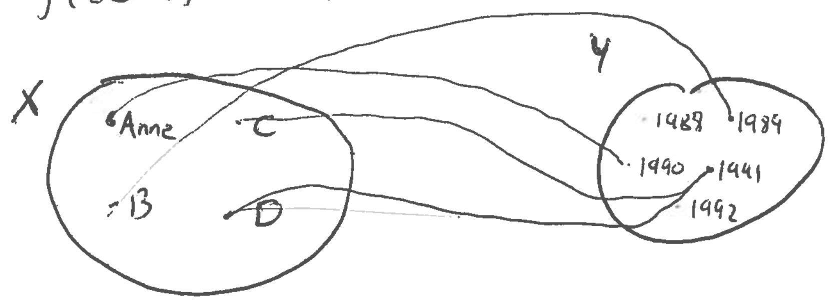
$Y = \{\text{årstall}\} \subseteq \mathbb{N}$

$f(\text{Anne}) = 1990$

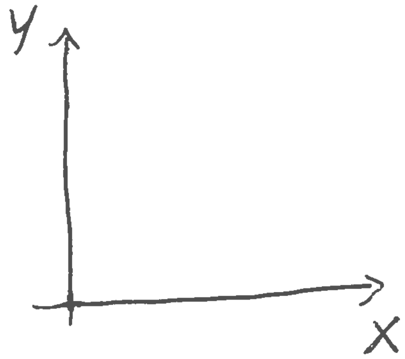
$f(\text{Bernt}) = 1989$

$f(\text{Cato}) = 1991$

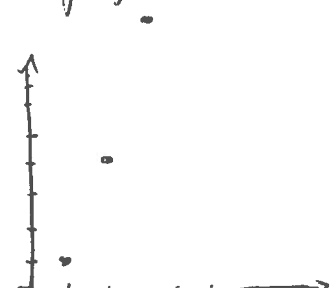
$f(\text{Dina}) = 1991$



Ofte, når X, Y er delmengder av $\mathbb{R}$



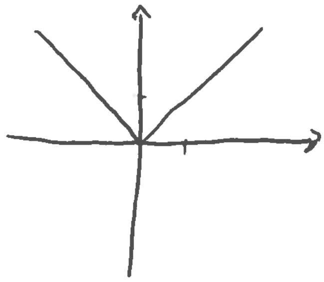
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

Absoluttverdi-funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



notasjon $f(x) = |x|$

NB! Vær varsom når dere løser ligninger (og ulikheter) der $|x|$ er involvert!

Ex $|x-3| = 2 \iff x-3=2$ eller $x-3=-2$

$\iff x = 5$ eller $x = 1$

Oppgave $|x-3| = |2x-2|$

Ulikheter $|a| > b$

to tilfeller

I. $b \leq 0$: alltid

II. $b > 0$. $a > b$ eller $a < -b$

$|a| < b$

to tilfeller

I. $b < 0$: aldri

II $b \geq 0$: $-b < a < b$

Oppg: når er $|x-2| > |2x+1|$

- Eksempler på funksjoner

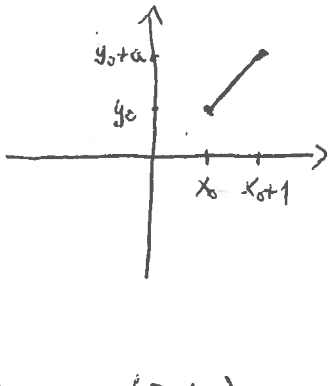
- Lineære funksjoner
- Polynomer
- Rasjonale funksjoner
- eksponensial og logaritme funksjoner
- trigonometriske funksjoner (sinus/cosinus/tangens)

- absoluttverdi-funksjonen

- Lineære funksjoner

$y = f(x) = ax + b$ (merk, tillater $a = 0$, i så fall er $y = b$ konstant funksjonen).

Grafen til $y = f(x)$ "er" en rett linje med stigningstall a, og som skjærer y-aksen i b, dvs $(0, b)$ er et punkt på grafen.



Oppgaver: gitt at punktene

$(1,4)$ og $(3,10)$

er på grafen til $y = ax + b$. Hva må da a, b være?

Polynomer

$f(x) = ax^2 + bx + c$ Kvadratisk polynom (-funksjon) $(a \neq 0)$

generelt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n'te grads funksjon

Skal senere se på grafer til slike.

Ex: $f(x) = -x^2 + 1$

$f(x) = x^3 - 2x + 1$ (plottet: GeoGebra)

Rasjonale funksjoner

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ $p(x), q(x)$ er polynomer

D_f må ikke inneholde nullpunktene til $q(x)$

(def: x_0 er et nullpunkt til $q(x)$ hvis $q(x_0) = 0$)

Ex $f(x) = \dfrac{1}{x}$ D_f kan ikke inneholde 0

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$ D_f kan ikke inneholde 1 eller 2.

(plottet: GeoGebra)

Ligninger og funksjoner

Ligninger gir noen ganger opphav til funksjoner.

Ex

ligningen $\quad 2x - y = 1$

er ekvivalent med $\quad y = 2x - 1$

som kan tolkes som en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y = f(x) = 2x - 1$.

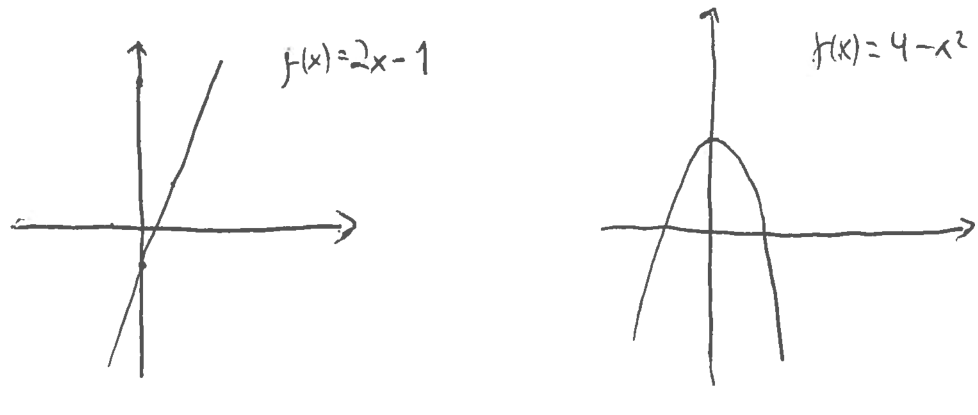
Ex

$x^2 + y = 4 \iff y = 4 - x^2$, tolkes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = f(x) = 4 - x^2$

Merk : grafen til funksjonene over, er de samme som grafene til ligningene

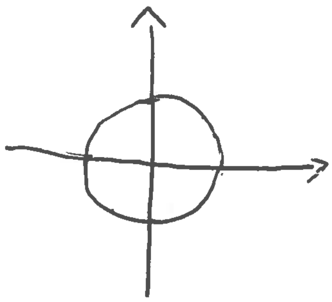
eks



NB! for hver verdi av x er det bare ett punkt $(x, f(x))$ på grafen til f.

(vertikal-linje-testen: hver vertikale linje skjærer grafen bare én gang)

<u>Ex</u> $x^2 + y^2 = 1$



denne ligningen gir <u>ikke</u> opphav til en bestemt funksjon

$$x^2 + y^2 = 1$$

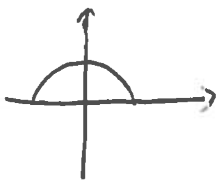
$$\Updownarrow$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{eller} \quad y = -\sqrt{1-x^2}$$

Vi kan f.eks. definere funksjonen

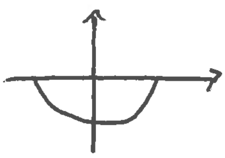
$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad g : [-1,1] \to [-1,1] \subseteq \mathbb{R}$$

med grafen



eller funksjonen $h(x) = -\sqrt{1-x^2}$ $\quad h : [-1,1] \to [-1,1] \subseteq \mathbb{R}$

med grafen



eller funksjonen

$$z(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & x \in [-1,0) \\ \sqrt{1-x^2} & x \in [0,1] \end{cases}$$

med grafen