Eksponensial- og logaritmefunksjoner

Øystein Skartsæterhagen

Forelesning i MA0003 05.09.2011

1 Eksponensialfunksjoner

Vi kjenner godt til hva det vil si å opphøye et reelt tall i et naturlig tall (altså et positivt heltall):

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ ganger}} \qquad \text{for } n \in \mathbb{N} \text{ og } a \in \mathbb{R}.$$

Vi vil utvide dette slik at eksponenten kan være et vilkårlig reelt tall. Vi vil altså definere hva vi mener med uttrykket

$$a^x \qquad \text{for } x \in \mathbb{R} \text{ og } a \in (0, \infty).$$

(Den oppmerksomme leser merker at vi her plutselig sier at a må være positiv. Det er fordi vi vil støte på problemer hvis vi forsøker å ta vilkårlige potenser av negative tall og av 0.)

Vi vil nærme oss reelle eksponenter ved å først gi definisjoner for to mindre tallmengder som inneholder de naturlige tallene: heltallene ($\mathbb{Z}$) og de rasjonale tallene ($\mathbb{Q}$). Vi husker at vi har tallmengdene

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, \ldots \,\} & \text{(naturlige tall)} \\
\cap & \\
\mathbb{Z} = \{\, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \,\} & \text{(hele tall)} \\
\cap & \\
\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \text{ og } n \in \mathbb{N} \right\} & \text{(rasjonale tall)} \\
\cap & \\
\mathbb{R} & \text{(reelle tall)}
\end{array}$$

Vi har følgende regneregler for potenser:

$$a^{x+y} = a^x a^y \tag{P1}$$

$$a^{xy} = (a^x)^y \tag{P2}$$

Vi vet at disse holder når eksponentene x og y er naturlige tall. Når vi utvider definisjonen av potenser til å omfatte hele, rasjonale og relle eksponenter, vil vi at disse reglene fortsatt skal holde.

1.1 Hele eksponenter ($\mathbb{Z}$)

Vi har allerede definert a^n når n er et naturlig tall, så det som mangler fra $\mathbb{Z}$ er 0 og de negative tallene.

Vi ser først på hva a^0 bør være (der a er et vilkårlig positivt reelt tall). La oss anta at a^0 er definert og at regel (P1) holder. Da har vi

$$a^0 \cdot a = a^0 \cdot a^1 \overset{\text{(P1)}}{=} a^{0+1} = a^1 = a.$$

Ved å dele på a får vi

$$a^0 = 1.$$

Ved å bare anta at a^0 er definert – uten å anta noe om hva verdien er – har vi altså dedusert at $a^0 = 1$. Når vi skal definere potensen a^0 har vi altså ikke noe valg: vi må definere den til å være lik 1.

La oss nå se på negative heltallige eksponenter. Vi vil definere potensen a^{-n}, der n er et naturlig tall og a et positivt reelt tall. Igjen antar vi at potensen er definert og ser hva vi kan utlede. Vi får

$$a^{-n} \cdot a^n \overset{\text{(P1)}}{=} a^{-n+n} = a^0 = 1$$

ved å bruke regel (P1) og definisjonen vår av a^0. Dermed må vi ha

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Vi tar dette som definisjonen av a^{-n}.

Vi oppsummerer med følgende definisjon.

Definisjon. La a være et positivt reelt tall. Da er potensene av a med heltallig eksponent definert ved

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^n &= \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ ganger}}, \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \end{aligned}$$

der n er et naturlig tall. ■

Oppgave 1. Regn ut potensene.

a) 7^{-2}

b) 2^{-5}

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ■

1.2 Rasjonale eksponenter ($\mathbb{Q}$)

Vi vil nå utvide videre, og definere potenser med rasjonale eksponenter. Disse er på formen

$$a^{\frac{m}{n}} \qquad \text{for } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ og } a \in (0, \infty).$$

Vi ser først på $a^{\frac{1}{n}}$ for $n \in \mathbb{N}$. Vi antar at denne er definert, og ser hva vi kan utlede fra det. Ved å bruke regel (P2) får vi

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \overset{\text{(P2)}}{=} a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Vi har altså at $a^{\frac{1}{n}}$ må være et tall som er slik at når vi opphøyer det i n-te, får vi a. Vi bør[1] altså ha

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

La oss videre se på hva $a^{\frac{m}{n}}$ bør være. Med $a^{\frac{1}{n}}$ definert som over og regel (P2) får vi

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} \overset{\text{(P2)}}{=} (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Vi oppsummerer med følgende definisjon.

Definisjon. La a være et positivt reelt tall og $\frac{m}{n}$ et rasjonalt tall (med $m \in \mathbb{Z}$ og $n \in \mathbb{N}$). Da er potensen $a^{\frac{m}{n}}$ definert ved

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$ ■

Oppgave 2. Regn ut potensene.

a) $4^{\frac{1}{2}}$

b) $27^{-\frac{1}{3}}$

c) $9^{\frac{3}{-4}}$ ■

1.3 Reelle eksponenter ($\mathbb{R}$)

Vi har nå definert potensen

$$a^x$$

for alle positive reelle tall a og alle rasjonale tall x. Det eneste vi mangler nå er å definere hva a^x skal være når x er et irrasjonalt tall, for eksempel π eller $\sqrt{2}$.

Før vi gir en definisjon for de irrasjonale tallene, skal vi se på et eksempel som antyder hvordan definisjonen bør være.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

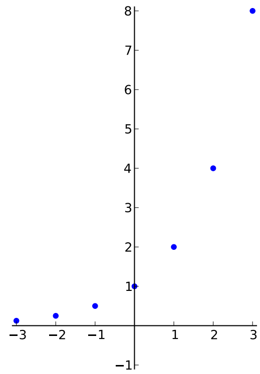
$$f(x) = 2^x.$$

[1]Det står *bør* og ikke *må* fordi vi også kunne valgt å sette $a^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{a}$ når n er et partall, men det ville bare ført til problemer.

La oss beregne noen verdier av funksjonen og tegne dem inn i et koordinatsystem. Vi ser først på x-verdier som er heltall omkring 0:

$$2^0 = 1 \qquad 2^1 = 2 \qquad 2^2 = 4 \qquad 2^3 = 8$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad 2^{-2} = \frac{1}{4} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

I et koordinatsystem blir det seende slik ut:

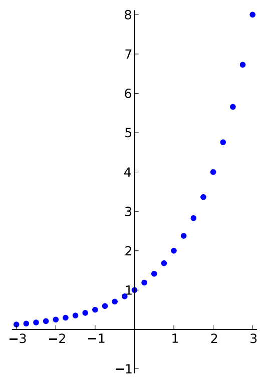


Vi aner allerede at disse punktene kan kobles sammen til en pen glatt kurve.

La oss nå beregne $f(x)$ for noen rasjonale verdier av x som ikke er heltall:

$$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.19 \qquad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41 \qquad 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} \approx 1.68$$
$$2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5} \approx 2.38 \qquad 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} \approx 2.83 \qquad 2^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{2^7} \approx 3.36$$

Hvis vi legger til disse punktene (og en god del flere, som vi kan beregne på samme måte) i koordinatsystemet vårt, ser vi at det virkelig begynner å nærme seg en jevn og sammenhengende kurve:



Hvis vi fortsetter med å tegne inn funksjonsverdiene for rasjonale tall x, vil vi se at alle passer pent inn, men vi får likevel ikke en helt sammenhengende kurve. Siden vi ikke har definert 2^x når x er irrasjonal, vil grafen vår ha et «hull» ved hvert irrasjonale tall, for eksempel $x = \pi$ og $x = \sqrt{2}$.

Når vi skal utvide definisjonen av 2^x til å gjelde alle reelle tall x, vil vi definere verdiene for irrasjonale tall slik at de passer inn i grafen. For eksempel vil vi ha

$$2^{\pi} \approx 2^{3.14} \qquad \text{siden } \pi \approx 3.14. \qquad \blacksquare$$

Moralen i eksempelet er at verdiene av

$$a^x \qquad \text{for rasjonale verdier av } x$$

plasserer seg langs en glatt kurve. Når vi skal «tette hullene» ved å definere a^x også for irrasjonale verdier av x, bør vi definere disse slik at de passer inn i denne kurven. Vi vil nå gjøre dette litt mer presist.

Vi vet at ethvert reelt tall kan skrives på desimalform med uendelig mange siffer. For eksempel har vi

$$\frac{3}{2} = 1.5000\ldots \qquad \frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$
$$\pi = 3.14159265\ldots \qquad \sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

Hvis vi har et reelt tall, kan vi lage en tilnærming til tallet ved å ta med bare endelig mange av sifrene. Da får vi et rasjonalt tall, uansett om det opprinnelige tallet er rasjonalt eller ikke. Vi kan for eksempel tilnærme π ved å ta med bare fem siffer etter komma. Da får vi

$$3.14159 = \frac{314159}{100000},$$

som er rasjonalt. Ved å ta med flere siffer får vi en bedre tilnærming. Slik kan vi finne rasjonale tall som er så nær tallet vårt vi måtte ønske.

Det følgende eksempelet illustrerer hvordan vi kan bruke dette til å definere potenser a^x der x er et vilkårlig reelt tall.

Eksempel. Vi vil definere 2^π. Vi ser på verdiene av 2^x når vi lar x gå over de rasjonale tilnærmingene til π vi får ved å ta med endelig mange siffer:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ 2^{3.1} &= 2^{\frac{31}{10}} \approx 8.574 \\ 2^{3.14} &= 2^{\frac{314}{100}} \approx 8.815 \\ 2^{3.141} &= 2^{\frac{3141}{1000}} \approx 8.821 \end{aligned}$$

Sekvensen

$$2^3, \quad 2^{3.1}, \quad 2^{3.14}, \quad 2^{3.141}, \quad \ldots$$

går mot ett bestemt reelt tall. Vi definerer 2^π til å være dette tallet. ■

Vi kan i eksempelet over bytte ut 2 med et hvilket som helst positivt reelt tall a og π med et hvilket som helst reelt tall x. Hvis vi gjør dette, og ellers følger fremgangsmåten i eksempelet, får vi definisjonen av

$$a^x \qquad \text{for } x \in \mathbb{R} \text{ og } a \in (0, \infty),$$

som er det vi var ute etter.

Oppgave 3. Skisser grafene til følgende funksjoner.

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = 10^x$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ■

2 Logaritmer

Vi har sett på hvordan vi kan opphøye et tall a i et vilkårlig reelt tall x. Nå skal vi gå motsatt vei. Istedenfor å spørre

$$\text{«hva er } a \text{ opphøyd i } x\text{?»}$$

vil vi spørre

$$\text{«hva må vi opphøye } a \text{ i for å få } y\text{?»}$$

Vi vil altså løse likninger der den ukjente er en eksponent.

Den følgende oppgaven gir noen enkle eksempler på slike likninger, der det er (nokså) lett å finne svaret ved å gjette eller prøve seg frem.

Oppgave 4. Løs likningene.

a) $10^x = 1000$

b) $10^x = 0.01$

c) $2^x = \frac{1}{4}$

d) $8^x = 4$ ■

Generelt kan det være vanskelig å se hva løsningen på en slik likning skal være. Redningen er *logaritmefunksjonene*. De forteller oss nemlig akkurat hva svaret er.

For en likning på formen

$$b^x = a$$

er løsningen gitt ved logaritmefunksjonen med grunntall b:

$$x = \log_b a.$$

Vi vil nå definere hva vi mener med dette.

Definisjon. La a og b være positive reelle tall. Da er **b-logaritmen** til a, som skrives

$$\log_b a,$$

definert som det tallet vi må opphøye b i for å få a. Altså:

$$b^{\log_b a} = a.$$

Tallet b kalles **grunntallet** (eller **basisen**) til logaritmefunksjonen $\log_b$. ■

Eksempel. Et par eksempler på verdier av forskjellige logaritmefunksjoner:

i) $\log_5 25 = 2$, siden $5^2 = 25$.

ii) $\log_{10} 1000000 = 6$, siden $10^6 = 1000000$.

iii) $\log_{10} 0.1 = -1$, siden $10^{-1} = 0.1$.

iv) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$, siden $16^{\frac{1}{4}} = 2$. ■

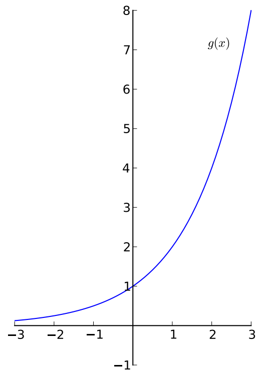
Eksempel. Vi vil beskrive logaritmefunksjonen

$$f(x) = \log_2 x.$$

Til hjelp bruker vi den tilsvarende eksponensialfunksjonen

$$g(x) = 2^x.$$

Grafen til g ser slik ut:

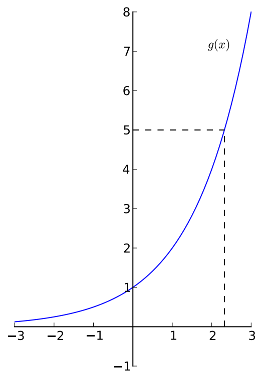


Hvis vi får oppgitt et tall a og vil finne ut hva $\log_2 a$ er, kan vi bruke grafen til g ≪baklengs≫. Tallet $\log_2 a$ er (per definisjon) det tallet vi må opphøye 2 i for å få a. Det er altså det tallet vi kan gi til g for å få a ut:

$$g(\log_2 a) = a.$$

Vi kan derfor lese av $\log_2 a$ fra grafen for g ved å gå opp til a på y-aksen, ut til grafen, og se hvor langt ute på x-aksen vi er kommet.

La oss finne $\log_2 5$ på denne måten:



Vi ser at $2^x = 5$ omtrent ved $x = 2.3$, så

$$\log_2 5 \approx 2.3. \qquad \blacksquare$$

Eksempel. La igjen f være logaritmefunksjonen

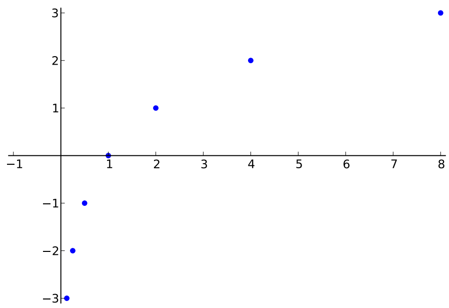
$$f(x) = \log_2 x.$$

Vi vil tegne grafen til denne funksjonen.

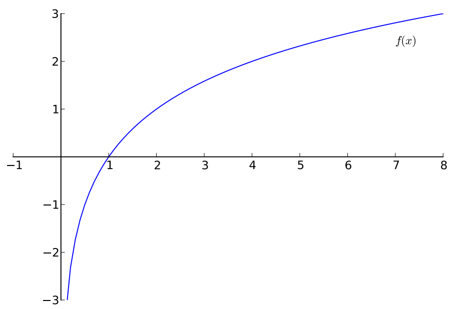
Vi begynner med å beregne noen verdier. Det er lett å beregne $\log_2 x$ når x er en heltallig potens av 2, så vi begynner med slike x-verdier:

$$\begin{array}{llll} \log_2 1 = 0 & \log_2 2 = 1 & \log_2 4 = 2 & \log_2 8 = 3 \\ & \log_2 \dfrac{1}{2} = -1 & \log_2 \dfrac{1}{4} = -2 & \log_2 \dfrac{1}{8} = -3 \end{array}$$

Vi tegner inn disse verdiene i et koordinatsystem:



Vi kan gjette at resten av grafen skal være en glatt linje gjennom disse punktene. Og hvis vi ser på hvordan vi fant $\log_2 5$ fra grafen til 2^x i forrige eksempel, skjønner vi at det er akkurat hva som skjer. Grafen til logaritmefunksjonen $\log_2 x$ blir nøyaktig som grafen til eksponensialfunksjonen 2^x, men med aksene byttet om:

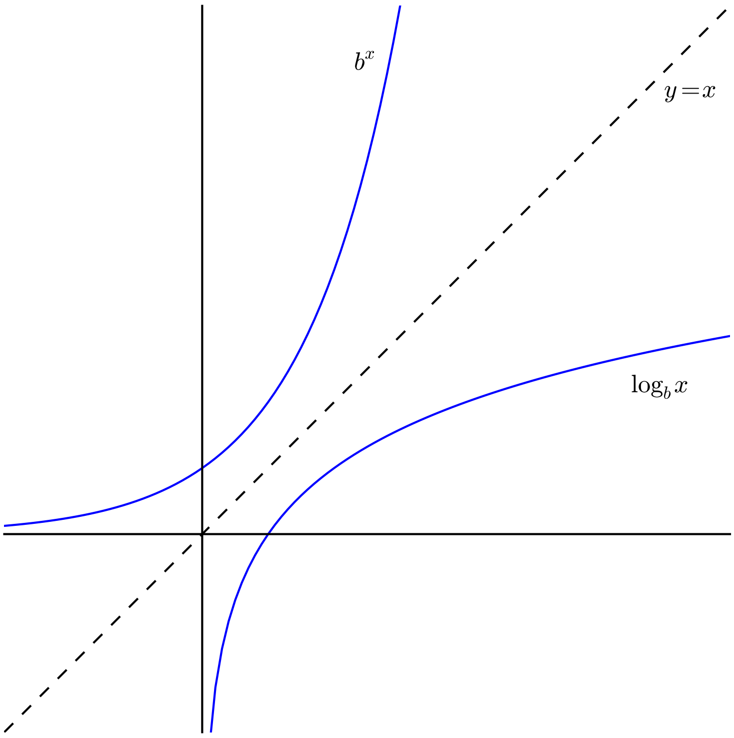


■

Vi har generelt, som i eksempelet over, at grafen til en logaritmefunksjon $\log_b x$ ser ut som grafen til eksponensialfunksjonen b^x speilet om linjen $y = x$ (se figur 1).

Når grunntallet b er større enn 1, kan vi gjøre følgende to observasjoner for store verdier av x:

1. Eksponensialfunksjonen b^x vokser *veldig fort*.
2. Logaritmefunksjonen $\log_b x$ vokser *veldig sakte*.



Figur 1: Grafen til $\log_b x$ er som grafen til b^x speilet om linjen $y = x$.