Grenseverdier

Øystein Skartsæterhagen

Forelesning i MA0003 07.09.2011

1 Hva er grenseverdier?

La oss anta at vi har gitt en funksjon f og et tall a. Dersom a ligger i definisjonsmengden til f, kan vi finne funksjonsverdien $f(a)$. Det vi skal gjøre nå er noe litt annet. Vi skal se på hvordan funksjonen f oppfører seg i området rundt a. Vi skal definere noe vi kaller *grenseverdien* til $f(x)$ når x går mot a, som skrives

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

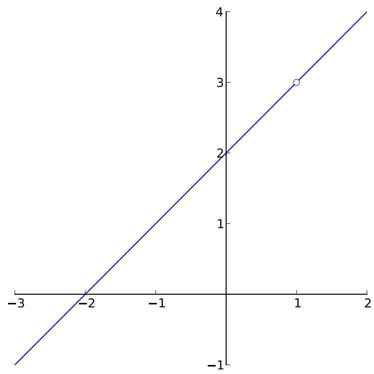
Denne grenseverdien er den verdien $f(x)$ nærmer seg når vi lar x nærme seg a (uten å bli helt lik a), og den kan eksistere selv når a ikke er i definisjonsmengden til f.

Vi ser på noen eksempler for å gjøre det tydeligere hva som menes.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

Definisjonsmengden til f er $\mathbb{R} - \{1\}$ (mengden av alle reelle tall unntatt 1). Vi har altså ikke noen definert verdi for $f(1)$. Men la oss se på grafen til f:



Her ser det ut som at hvis $f(1)$ skulle vært definert, burde den vært 3, for det er det punktet grafen nærmer seg når x nærmer seg 1 (fra venstre eller fra høyre).

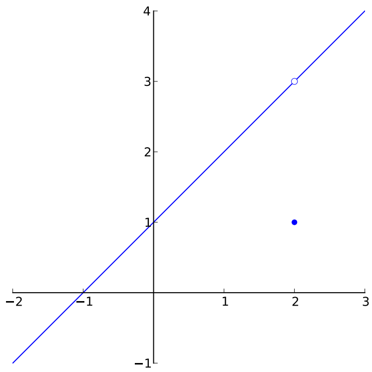
Vi sier at 3 er *grenseverdien* til $f(x)$ når x går mot 1, og skriver

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3. \qquad \blacksquare$$

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x \neq 2, \\ 1 & \text{for } x = 2. \end{cases}$$

Grafen til f ser slik ut:



Grafen gjør et «hopp» ved $x = 2$. Når x nærmer seg 2 ovenfra eller nedenfra, går $f(x)$ mot 3, men akkurat for $x = 2$ er $f(x) = 1$. Vi har derfor

$$f(2) = 1, \qquad \text{men} \quad \lim_{x \to 2} f(x) = 3.$$

Men hvis vi ser på en hvilken som helst annen x-verdi, har vi at funksjonsverdien er det samme som den verdien grafen nærmer seg fra punktene rundt. Ta for eksempel $x = 1$. Vi har

$$f(1) = 2.$$

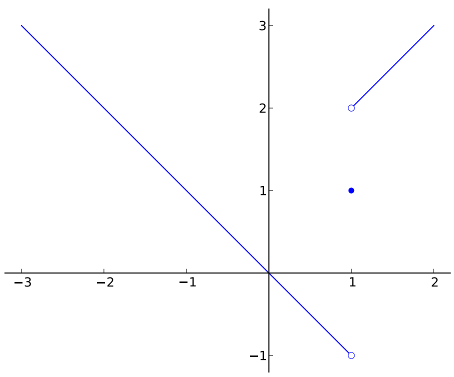
Hvis vi følger grafen mot $x = 1$ fra venstre eller høyre, ser vi at verdien nærmer seg 2, og vi har derfor også

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2. \qquad \blacksquare$$

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x < 1, \\ 1 & \text{for } x = 1, \\ x+1 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Grafen til f ser slik ut:



Her er det punktet $x = 1$ som er spesielt. Vi har

$$f(1) = 1.$$

Men hva bør grenseverdien

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

være? Hvis vi følger grafen mot $x = 1$ fra venstre, ser vi at $f(x)$ nærmer seg -1. Men hvis vi følger den mot $x = 1$ fra høyre, ser vi at $f(x)$ nærmer seg 2. Siden det ikke finnes ett bestemt punkt $f(x)$ nærmer seg når x nærmer seg 1, er grenseverdien

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

udefinert.

Vi kan imidlertid definere to «ensidige» grenseverdier: grenseverdien fra venstre og grenseverdien fra høyre. I dette tilfellet har vi at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 1 fra venstre er -1. Vi skriver dette som

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1.$$

Grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 1 fra høyre er 2. Vi skriver dette som

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

■

Nå som vi har sett noen eksempler på hva som menes med grenseverdibegrepet, kan vi formulere en definisjon.

Definisjon. La f være en funksjon, og la a og L være reelle tall. Dersom vi kan tvinge funksjonsverdiene $f(x)$ så nær inntil L vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær a, sier vi at L er **grenseverdien** til $f(x)$ når x går mot a, og skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definisjonene for de ensidige grenseverdiene

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

er tilsvarende, men vi ser da bare på verdier av x som er mindre enn a (for den venstre grensen) eller større enn a (for den høyre grensen). ■

Fra definisjonen er det klart at hvis de to ensidige grenseverdiene

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

eksisterer, og disse har samme verdi, så må også grenseverdien

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

eksistere, og være lik som de ensidige grenseverdiene. Omvendt får vi også at hvis grenseverdien

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

eksisterer, så eksisterer også de ensidige grenseverdiene, og vi har

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Oppgave 1. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x < 1, \\ 1 & \text{for } 1 \le x < 2, \\ 2x & \text{for } x \ge 2. \end{cases}$$

Finn grenseverdiene, dersom de eksisterer.

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

f) $\lim_{x \to 2} f(x)$ ■

Definisjonen vår av grenseverdier er litt vag – det er ikke fullstendig klart hva som menes med for eksempel «så nær vi måtte ønske» eller «tilstrekkelig nær». Men en helt presis definisjon av grenseverdier blir nødvendigvis litt komplisert, og er ikke pensum i dette faget. Til glede for de av dere som ikke liker vage definisjoner har jeg tatt med en mer skikkelig definisjon i den neste seksjonen.

2 Definisjon av grenseverdi[1]

La f være en funksjon, og la a være et reelt tall.

Vi vil definere hva det vil si at et tall L er *grenseverdien til* $f(x)$ *når* x *går mot* a. Da bryr vi oss ikke om hva verdien $f(a)$ er, eller om den i det hele tatt er definert. Vi vil bare se på hvilke verdier $f(x)$ får for verdier av x i små områder omkring a. For at L skal være grenseverdien, må vi kunne få disse verdiene til å komme så nær L vi vil ved å velge x fra et tilstrekkelig lite område omkring a.

Mer presist skal vi kunne velge oss en «maksimal tillatt feil» ϵ, som kan være vilkårlig liten (men ikke 0). Det må da – uansett hvilken ϵ vi velger – være mulig å finne et område

$$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \qquad \text{for en } \delta > 0$$

rundt a på x-aksen slik at

$$f(x) \approx L \qquad \text{med feil mindre enn } \epsilon$$

for alle x i det valgte området.

Hvis dette stemmer, sier vi at L er **grenseverdien** til $f(x)$ når x går mot a, og skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

For at dette skal fungere, må f være definert i punktene rundt a, selv om den ikke nødvendigvis er definert i a. Vi krever altså at det finnes et intervall

$$(c, d) \qquad \text{med } c < a < d$$

rundt a, slik at hele dette intervallet er med i definisjonsmengden til f, bortsett fra a, som ikke trenger å være med.

[1] Denne seksjonen er utenfor pensum, og leses på eget ansvar.

Vi definerer også en venstre og en høyre grenseverdi:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{(grenseverdien til } f(x) \text{ når } x \text{ går mot } a \text{ fra venstre),}$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{(grenseverdien til } f(x) \text{ når } x \text{ går mot } a \text{ fra høyre).}$$

Disse defineres på samme måte som den vanlige grenseverdien, men istedenfor at det skal være mulig å velge et område rundt a, er det nok at det er mulig å velge et område

$$(a-\delta, a) \qquad \text{til venstre for } a \text{ (for den venstre grenseverdien)}$$

eller et område

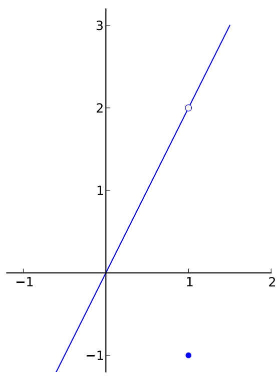
$$(a, a+\delta) \qquad \text{til høyre for } a \text{ (for den høyre grenseverdien).}$$

Vi tar et eksempel for å se hvordan definisjonen brukes.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } x \neq 1, \\ -1 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

Grafen til f ser slik ut:



Vi vil finne grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 1, altså

$$\lim_{x\to 1} f(x).$$

Når vi ser på grafen er det tydelig at denne grenseverdien bør være 2. La oss nå sjekke dette med definisjonen av grenseverdi.

For at det skal stemme at grenseverdien i 1 er 2, må vi for en vilkårlig liten feilmargin $\epsilon > 0$ kunne finne et område

$$(1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta) \qquad \text{(for en } \delta > 0\text{)}$$

omkring 1 på x-aksen slik at

$$f(x) \approx 2 \qquad \text{med feil mindre enn } \epsilon$$

i dette området.

Sett at vi for eksempel får oppgitt $\epsilon = 0.5$. Da kan vi velge området

$$(0.75, 1) \cup (1, 1.25)$$

omkring 1. Hvis x ligger i dette området, har vi

$$0.75 < x < 1.25 \qquad \text{og} \qquad x \neq 1.$$

Da er $f(x) = 2x$ (siden $x \neq 1$), og vi får

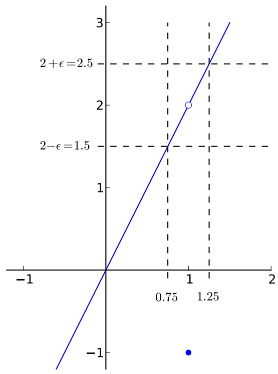
$$2 \cdot 0.75 < 2x < 2 \cdot 1.25,$$

som gir

$$1.5 < f(x) < 2.5.$$

Siden $f(x)$ ligger i området $(1.5, 2.5)$, har vi at $f(x) \approx 2$ med feil mindre enn 0.5, som var det vi ville.

Den følgende figuren illustrerer det vi nettopp gjorde. Merk at vi ikke kunne ha valgt området rundt 1 på x-aksen større, for da hadde noen funksjonsverdier i området gått utenfor den tillatte feilmarginen.



Men det holder ikke å skrive et slikt argument bare for én bestemt verdi av ϵ, for det må fungere for en hvilken som helst ϵ som er større enn 0. For å virkelig bevise at grenseverdien er 2 må vi gi et generelt argument som holder for en vilkårlig ϵ.

Anta gitt en feilmargin $\epsilon > 0$. Vi må velge et område omkring 1; vi velger oss

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1\right) \cup \left(1, 1 + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

For en x som ligger i dette området har vi

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < x < 1 + \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{og} \qquad x \neq 1.$$

Da er

$$2 - \epsilon < 2x < 2 + \epsilon,$$

og siden $f(x) = 2x$ (i og med at $x \neq 1$) får vi

$$2 - \epsilon < f(x) < 2 + \epsilon.$$

Altså er $f(x) \approx 2$ med feil mindre enn ϵ. ■

3 Om eksistens

La oss nå se på noen tilfeller der grenseverdien ikke eksisterer. Vi har allerede sett at det kan forekomme at de ensidige grenseverdiene

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

er ulike, og da eksisterer ikke grenseverdien

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Men det kan også skje at ikke engang de ensidige grenseverdiene eksisterer, som det følgende eksempelet viser.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}.$$

Vi vil undersøke om

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

eksisterer.

Se på verdiene

$$\frac{1}{\pi} \qquad \frac{1}{2\pi} \qquad \frac{1}{3\pi} \qquad \frac{1}{4\pi} \qquad \cdots$$

Disse nærmer seg 0 ovenfra, og ved å gå langt nok ut i denne rekken, kan vi komme vilkårlig nær 0. La oss se hva f gjør med disse:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\pi}\right) &= \cos \frac{1}{1/\pi} = \cos \pi = -1 \\
f\left(\frac{1}{2\pi}\right) &= \cos \frac{1}{1/(2\pi)} = \cos 2\pi = 1 \\
f\left(\frac{1}{3\pi}\right) &= \cos \frac{1}{1/(3\pi)} = \cos 3\pi = -1 \\
f\left(\frac{1}{4\pi}\right) &= \cos \frac{1}{1/(4\pi)} = \cos 4\pi = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uansett hvor nær 0 vi lar x komme, vil $f(x)$ kunne bli både 1 og -1 (og alt imellom). Grenseverdien

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

til $f(x)$ når x går mot 0 ovenfra eksisterer altså ikke.

Vi kan på liknende vis se at grenseverdien

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

til $f(x)$ når x går mot 0 nedenfra heller ikke eksisterer. ■

Generelt trenger det ikke være noen sammenheng mellom

$$\lim_{x \to a^-} f(x), \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{og} \qquad f(a).$$

Hvilke som helst av disse kan eksistere uten at de andre gjør det, og de som eksisterer er ikke nødvendigvis like.

4 Uendelighet og grenseverdier

Vi har definert hva vi mener med at

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

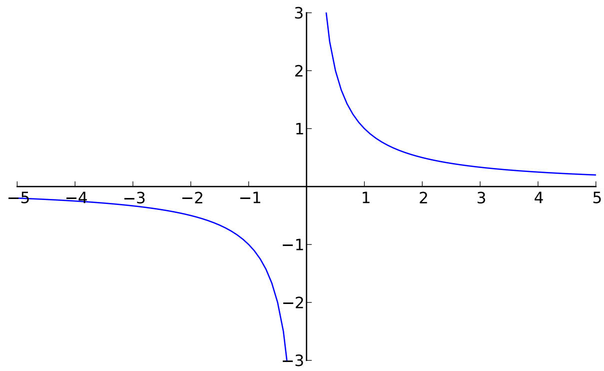
der f er en funksjon, og a og L er reelle tall. Vi vil nå utvide grensebegrepet vårt, og tillate at a og L er enten reelle tall eller en av de uendelige verdiene ∞ eller $-\infty$.

Vi vil altså både se på grenseverdier når x går mot ∞ eller $-\infty$ (istedenfor å gå mot et reelt tall), og tilfeller der selve grenseverdien er ∞ eller $-\infty$. Vi tar et eksempel på det sistnevnte først.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Grafen til f ser slik ut:



Vi vil finne ut hva

$$\lim_{x \to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to 0} f(x)$$

er, dersom de eksisterer.

Når x nærmer seg 0 ovenfra, blir $f(x)$ stadig høyere, uten å nærme seg noe bestemt tall:

$$\begin{aligned} f(0.5) &= 2 \\ f(0.2) &= 5 \\ f(0.1) &= 10 \\ f(0.01) &= 100 \\ f(0.001) &= 1000 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vi kan dessuten få $f(x)$ til å bli så høy vi måtte ønske, ved å velge x til å være et positivt tall tilstrekkelig nær 0. Vi sier derfor at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 0 ovenfra er ∞, og skriver

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$

På samme måte har vi når x nærmer seg 0 nedenfra at $f(x)$ synker grenseløst:

$$\begin{aligned}
f(-0.5) &= -2 \\
f(-0.2) &= -5 \\
f(-0.1) &= -10 \\
f(-0.01) &= -100 \\
f(-0.001) &= -1000 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vi sier derfor at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot 0 nedenfra er $-\infty$, og skriver

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Grenseverdien

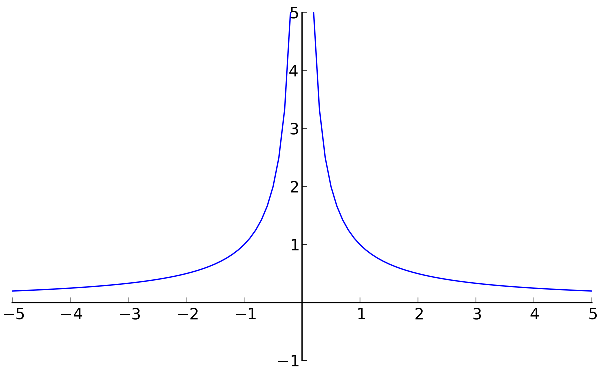
$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

eksisterer ikke, siden de to ensidige grenseverdiene er ulike. ■

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{|x|}.$$

Grafen til f ser slik ut:



Her har vi at $f(x)$ går mot ∞ både når x går mot 0 fra venstre og når x går mot 0 fra høyre, så vi har

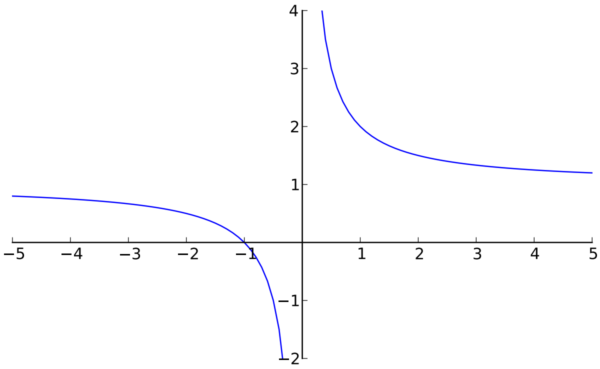
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty.$$ ■

Vi går nå over til å se på grenseverdier når x går mot ∞ eller $-\infty$.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Grafen til f ser slik ut:



Vi ser at etter hvert som x vokser mot ∞, kommer $f(x)$ stadig nærmere 1:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f(2) &= 1.5 \\ f(10) &= 1.1 \\ f(100) &= 1.01 \\ f(1000) &= 1.001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ved å ta x tilstrekkelig stor, kan vi få $f(x)$ så nær 1 vi ønsker. Vi sier derfor at grenseverdien til $f(x)$ når x går mot uendelig er 1, og skriver

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

Vi ser også at $f(x)$ nærmer seg 1 når x synker mot $-\infty$, så vi har

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

■

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 3x.$$

Når x vokser mot ∞ eller synker mot $-\infty$, gjør $f(x)$ det samme. Vi har derfor

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

■

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \sin x.$$

Hvis vi lar x vokse mot ∞, vil verdien av $f(x)$ stadig svinge mellom 1 og -1. Den nærmer seg aldri ett bestemt tall, og den går ikke mot ∞ eller $-\infty$. Vi har altså at grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

ikke eksisterer. ■

Oppgave 2. Finn grenseverdiene, dersom de eksisterer.

a) $\lim_{x\to\infty}(2-x)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+2}+4\right)$ ■

5 Regneregler for grenseverdier

Når vi skal finne en grenseverdi av et stort uttrykk, for eksempel

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}-\frac{2}{x}+3x+8\right),$$

er det fordelaktig om vi kan dele opp uttrykket i flere mindre uttrykk, finne grenseverdien for hvert av dem, og så kombinere disse for å finne grenseverdien for hele uttrykket. Det følgende teoremet gir oss regler for hvordan vi kan gjøre akkurat dette.

Teorem 1. La f og g være funksjoner, a og c relle tall, og n et positivt heltall. Anta at

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

eksisterer. Da har vi følgende.

i) $\lim_{x\to a} c = c$.

ii) $\lim_{x\to a} x = a$.

iii) $\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$.

iv) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$.

v) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$.

vi) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.

vii) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ dersom $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.

viii) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$.

ix) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ hvis n er odde eller $\lim_{x\to a} f(x) > 0$. ■

Merknad Vi kunne gjort listen i teoremet over kortere, uten å egentlig miste noe. Vi ser at (iii) følger fra (i) og (vi), at (v) følger fra (iii) og (iv), og at vi får (viii) ved å anvende (vi) flere ganger. ■

Eksempel. Vi beregner

$$\lim_{x\to 3} 5x^2.$$

Ved å kombinere regel (ii) og (viii) finner vi at

$$\lim_{x\to 3} x^2 = \big(\lim_{x\to 3} x\big)^2 = 3^2 = 9.$$

Nå forteller regel (iii) oss at

$$\lim_{x\to 3} 5x^2 = 5 \cdot \lim_{x\to 3} x^2 = 5 \cdot 9 = 45. \qquad \blacksquare$$

6 Grenseverdier av rasjonale funksjoner

For mange av funksjonene vi ser på vil en grenseverdi

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

alltid bli lik funksjonsverdien $f(a)$, uansett hva a er. Spesielt gjelder dette alltid hvis funksjonen f er et polynom, og det gjelder også hvis f er en rasjonal funksjon og a er i definisjonsmengden til f. Dette skal vi bevise, ved å bruke regnereglene fra teorem 1.

Vi husker at en funksjon f er et *polynom* hvis den kan skrives som

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

der n er et ikkenegativt heltall, og

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$$

er reelle tall. For eksempel er

$$2x^5 + x^3 - 0.2x + 4$$

et polynom, mens

$$\frac{1}{x} \qquad \text{og} \qquad \sin x$$

ikke er polynomer.

Teorem 2. Hvis f er et polynom, er

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

for alle reelle tall a.

Bevis. Siden f er et polynom, kan den skrives som

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

for et heltall $n \geq 0$ og reelle tall $c_0, \ldots, c_n$. Regel (i) fra teorem 1 forteller oss at

$$\lim_{x\to a} c_0 = c_0.$$

Regel (ii) gir

$$\lim_{x\to a} x = a,$$

og ved å kombinere med regel (viii) får vi

$$\lim_{x\to a} x^i = \big(\lim_{x\to a} x\big)^i = a^i$$

for hver i fra 1 til n. Da sier regel (iii) at

$$\lim_{x\to a} c_i x^i = c_i \cdot \lim_{x\to a} x^i = c_i a^i.$$

Nå kan vi bruke regel (iv) n ganger for å få

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0) \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \big(\lim_{x\to a} c_n x^n\big) + \cdots + \big(\lim_{x\to a} c_1 x\big) + \big(\lim_{x\to a} c_0\big) \\
&= c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

□

Vi husker at en *rasjonal funksjon* er en funksjon som er en kvotient av to polynomer. En funksjon f er altså rasjonal hvis den kan skrives som

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

der p og q er polynomer.

Spesielt er ethvert polynom en rasjonal funksjon, for hvis $f(x)$ er et polynom, har vi

$$f(x) = \frac{f(x)}{1},$$

der både funksjonen $f(x)$ og konstantfunksjonen 1 er polynomer.

Noen eksempler på rasjonale funksjoner er

$$4x^2 + x, \qquad \frac{1}{x} \qquad \text{og} \qquad \frac{3x^2 - 0.8x}{5x^3 + x - 1}.$$

Noen eksempler på funksjoner som ikke er rasjonale:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \\
g(x) &= |x| \\
h(x) &= \begin{cases} x + 1 & \text{for } x < 0, \\ x - 1 & \text{for } x \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

For rasjonale funksjoner får vi et litt svakere resultat enn for polynomer. Siden en rasjonal funksjon f ikke nødvendigvis har hele $\mathbb{R}$ som definisjonsmengde, kan vi ikke generelt ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

for alle reelle tall a. Vi har imidlertid dette for alle a som ligger i definisjonsmengden.

Teorem 3. Hvis f er en rasjonal funksjon, er

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

for alle reelle tall a som ligger i definisjonsmengden til f.

Bevis. Siden f er en rasjonal funksjon, har vi

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

for to polynomer p og q. La a være et tall i definisjonsmengden til x. Da er $q(a) \neq 0$. Teorem 2 forteller oss at

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to a} q(x) = q(a).$$

Siden begge disse grenseverdiene eksisterer, og $\lim\limits_{x\to a} q(x) \neq 0$, får vi fra teorem 1 (vii) at

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} p(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a). \qquad \square$$

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

Vi beregner

$$\lim_{x\to 6} f(x).$$

Siden f er en rasjonal funksjon og 6 er i definisjonsmengden til f, får vi fra teorem 3 at

$$\lim_{x\to 6} f(x) = f(6) = \frac{6^2 - 16}{6 - 4} = 10. \qquad \blacksquare$$

I eksempelet over kunne vi bruke teorem 3 til å finne grenseverdien i et hvilket som helst punkt, bortsett fra 4, som ikke er i definisjonsmengden til funksjonen. Men også for det problematiske punktet 4 kan det være hjelp å finne i teorem 3, hvis vi klarer å finne en annen funksjon som har samme grenseverdi i 4 og er definert der. Det neste eksempelet viser hvordan.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

Vi vil finne

$$\lim_{x\to 4} f(x).$$

Vi ser at $x^2 - 16$ kan faktoriseres som

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4).$$

Dermed har vi, for alle x unntatt 4:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x + 4.$$

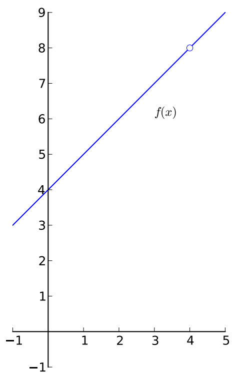
La oss definere en ny funksjon g ved

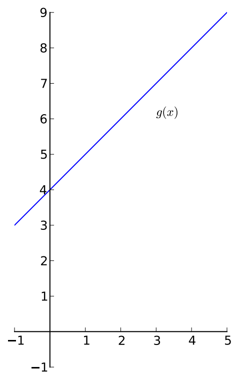
$$g(x) = x + 4.$$

Siden g er et polynom, har vi ved teorem 2 at

$$\lim_{x \to 4} g(x) = g(4).$$

La oss se på grafene til funksjonene f og g:





Vi ser at disse er helt identiske, med unntak av at grafen for f har et hull ved $x = 4$. Men grenseverdien

$$\lim_{x \to 4} f(x)$$

er kun avhengig av verdiene av $f(x)$ for x i nærheten av 4, og der er $f(x) = g(x)$. Vi må altså ha

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x).$$

Dermed får vi

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x) = g(4) = 4 + 4 = 8.$$ ■

Vi formulerer prinsippet vi brukte i dette eksempelet som et teorem.

Teorem 4. La f være en funksjon, og a et reelt tall. Hvis g er en funksjon slik at

$$f(x) = g(x) \qquad \text{for } x \neq a,$$

og $\lim_{x \to a} g(x)$ eksisterer, da eksisterer $\lim_{x \to a} f(x)$ også, og

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$ ■

Oppgave 3. Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}.$$ ■