Kontinuitet og vekst

Øystein Skartsæterhagen

Forelesning i MA0003 12.09.2011

1 Kontinuitet

Vi skal definere hva vi mener med at en funksjon f er *kontinuerlig*. Intuitivt sett betyr dette at grafen til f er en sammenhengende kurve.

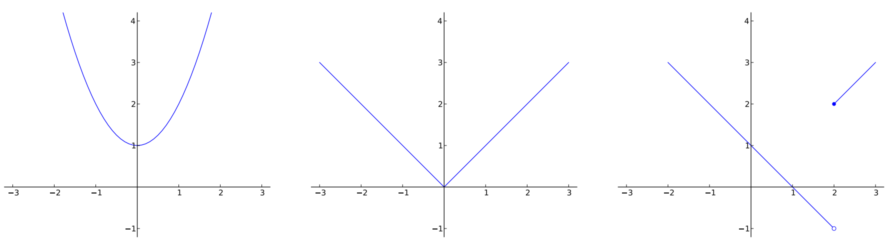
Vi skal bruke grenseverdier til å gi en formell definisjon av hva det vil si at f er kontinuerlig i et bestemt punkt, og hva det vil si at f er kontinuerlig på et intervall.

Vi ser først på et par konkrete eksempler på funksjoner for å få et inntrykk av hvordan det ser ut når en funksjon er (eller ikke er) kontinuerlig.

Eksempel. La funksjonene f, g og h være gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \\ g(x) &= |x| \\ h(x) &= \begin{cases} 1 - x & \text{for } x < 2 \\ x & \text{for } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Grafene til disse funksjonene ser slik ut:



$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$

Vi ser at grafen til f består av én sammenhengende kurve. Det samme gjelder grafen til g. Vi sier derfor at disse funksjonene er kontinuerlige på hele $\mathbb{R}$.

Grafen til h, derimot, består av to deler som ikke henger sammen: én del for $x < 2$ og en annen for $x \geq 2$. Vi sier at h er *diskontinuerlig* i punktet 2. ■

1.1 Kontinuitet i et punkt

Vi skal nå definere hva det vil si at en funksjon f er kontinuerlig i et bestemt punkt a. Med dette mener vi at hvis vi ser på bare et lite område omkring a på x-aksen, så er grafen til $f(x)$ en sammenhengende kurve. Hva som måtte skje for x-verdier som ligger langt unna a er ikke relevant.

For at f skal være kontinuerlig i a, må $f(a)$ være definert, for ellers ville det bli et hull i grafen til $f(x)$ akkurat ved $x = a$. I tillegg må vi ha at grafen ikke gjør et hopp ved $x = a$. Hvis vi nærmer oss $x = a$ fra venstre eller høyre, må $f(x)$ nærme seg $f(a)$, og ikke en helt annen verdi. Med andre ord må grenseverdien $\lim_{x \to a} f(x)$ være lik $f(a)$. Vi formulerer dette som en definisjon.

Definisjon. La f være en funksjon, og a et reelt tall. Funksjonen f er **kontinuerlig** i punktet a hvis

1. a er i definisjonsmengden til f, og
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ er definert, og
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funksjonen f er **diskontinuerlig** i punktet a hvis den ikke er kontinuerlig i a. ■

Oppgave 1. Finn ut om f er kontinuerlig i a.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 3, \\ 1 & \text{for } x \geq 3. \end{cases} \quad a = 3.$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \neq 0, \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases} \quad a = 0.$

d) $f(x) = x^2 - 4, \quad a = 2.$ ■

1.2 Rasjonale funksjoner

Vi husker at en funksjon f er *rasjonal* hvis

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

for to polynomer p og q. Spesielt er ethvert polynom også en rasjonal funksjon.

Forrige gang så vi[1] at hvis f er en rasjonal funksjon, så er

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

for enhver a i definisjonsmengden til f. Dette vil si at hvis f er en rasjonal funksjon og a er i definisjonsmengden til f, så er f kontinuerlig i a. Spesielt har vi at polynomer er kontinuerlige overalt.

Oppgave 2. Finn ut om f er kontinuerlig i 0.

a) $f(x) = 3x^2 + 5.$

b) $f(x) = \frac{1}{x}.$

c) $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 2x + 1}.$ ■

[1] teorem 3 på s. 14 i forelesningsnotatene fra 7. september

1.3 Kontinuitet på et intervall

Vi har definert hva det vil si at en funksjon er kontinuerlig i et punkt. Nå vil vi definere hva det vil si at en funksjon er kontinuerlig på et intervall, for eksempel

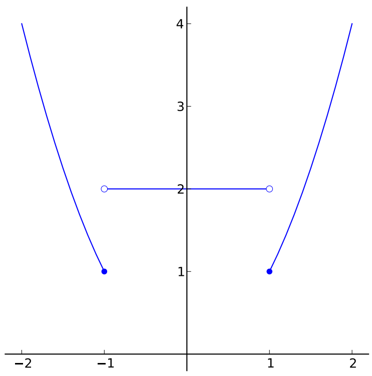
$$(1, 5), \qquad (0, \infty) \qquad \text{eller} \qquad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

At en funksjon f er kontinuerlig på et intervall I vil si at hvis vi tegner grafen til $f(x)$ for x-verdier i I, får vi en sammenhengende kurve.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{for } -1 < x < 1, \\ x^2 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Grafen til f ser slik ut:



Det er tydelig at f er diskontinuerlig i punktene -1 og 1, men den er kontinuerlig i alle andre punkter. Vi har altså at f er kontinuerlig i alle punkter i intervallene

$$(-\infty, -1), \qquad (-1, 1) \qquad \text{og} \qquad (1, \infty).$$

Vi sier at f er *kontinuerlig på* disse intervallene. Hvis vi ser på grafen til $f(x)$ der x-verdiene begrenses til kun ett av disse intervallene, får vi en sammenhengende kurve.

Funksjonen f er også kontinuerlig på mange mindre intervaller, for eksempel

$$(-0.5, 0.5) \qquad \text{og} \qquad (2, 3).$$

Men f er ikke kontinuerlig på for eksempel intervallet $(0, 2)$. ■

Vi gir nå en presis definisjon av kontinuitetsbegrepet for et intervall.

Definisjon. La f være en funksjon, og $I \subseteq \mathbb{R}$ et intervall. Funksjonen f er **kontinuerlig** på intervallet I hvis f er kontinuerlig i punktet a for enhver $a \in I$. ■

Oppgave 3. La funksjonene f, g og h være gitt ved

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 2$$
$$g(x) = \frac{1}{x}$$
$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x < 1, \\ 1 & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$$

Hvilke av disse funksjonene er kontinuerlige

a) på intervallet $(-1, 1)$?

b) på intervallet $(0, \infty)$?

c) på hele $\mathbb{R}$? ■

2 Vekst

Vi skal nå undersøke hvor raskt funksjoner vokser.

La f være en funksjon. Hvis f er lineær, kan den skrives som

$$f(x) = ax + b$$

for to reelle tall a og b. Vi vet da at a er stigningstallet til funksjonen. Dette betyr at hvis vi lar x øke med 1, så øker funksjonsverdien $f(x)$ med a:

$$f(x+1) - f(x) = a \qquad \text{for alle } x.$$

Hvis f derimot er en ikkelineær funksjon, har den ikke ett bestemt stigningstall. Se for eksempel på funksjonen

$$f(x) = x^2.$$

Denne synker når x er negativ, men stiger når x er positiv. Men selv om det for funksjoner som denne ikke gir mening å finne et stigningstall som gjelder for hele funksjonen, kan vi konsentrere oss om ett punkt på x-aksen, og prøve å finne et tall som beskriver hvor raskt funksjonen vokser akkurat der. Et slikt tall kalles den *deriverte* til funksjonen i det aktuelle punktet.

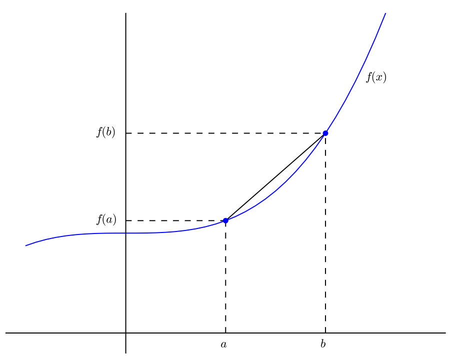
Før vi går løs på å finne veksten til en funksjon i et punkt, ser vi på hvordan vi kan finne den gjennomsnittlige veksten fra ett punkt til et annet.

2.1 Gjennomsnittsvekst for en funksjon

La f være en funksjon, og la a og b være reelle tall. Vi vil finne den gjennomsnittlige veksten til funksjonsverdien $f(x)$ når x går fra a til b. Med andre ord vil vi finne stigningstallet til den rette linjen mellom punktene

$$(a, f(a)) \qquad \text{og} \qquad (b, f(b)).$$

Den følgende figuren illustrerer situasjonen:



Stigningstallet til linjen kan beregnes som endringen i y-retning delt på endringen i x-retning, altså

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Vi finner gjennomsnittsveksten for f fra 1 til 3 og fra 2 til 3.

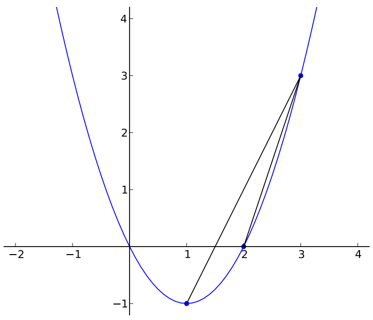
Gjennomsnittsveksten fra 1 til 3 er

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3-(-1)}{2} = 2.$$

Gjennomsnittsveksten fra 2 til 3 er

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{3-0}{1} = 3.$$

Disse to tallene er stigninstallene til de to rette linjene som er tegnet inn her:



Vi ser at linjen mellom 2 og 3 er brattere enn den mellom 1 og 3, og derfor har f større gjennomsnittsvekst fra 2 til 3 enn fra 1 til 3. ■

2.2 Avstand og hastighet

Anta at vi har et objekt som beveger seg, og en funksjon som beskriver hvor langt det har kommet etter en gitt tid. For eksempel kan funksjonen hete s og være definert slik at $s(t)$ er antall kilometer objektet har beveget seg etter t timer.

Da kan vi finne den gjennomsnittlige hastigheten til objektet over et tidsintervall $[t_1, t_2]$ ved å finne gjennomsnittsveksten til $s(t)$ fra $t = t_1$ til $t = t_2$.

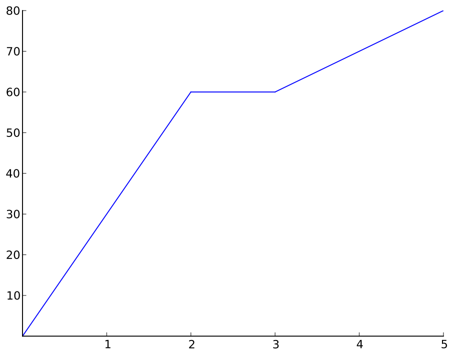
Eksempel. Able Gøyen er på en femtimers sykkeltur. Hvor langt han har kommet på et gitt tidspunkt er beskrevet av funksjonen

$$s\colon [0,5] \to \mathbb{R}$$

$$s(t) = \begin{cases} 30t & \text{for } 0 \leq t < 2, \\ 60 & \text{for } 2 \leq t < 3, \\ 10t + 30 & \text{for } 3 \leq t \leq 5. \end{cases}$$

For et gitt tidspunkt t er $s(t)$ antall kilometer Gøyen har syklet etter å ha vært ute i t timer.

Grafen til s ser slik ut:



Vi ser at Gøyen syklet ganske raskt de første to timene, så tok han seg en times pause, og deretter syklet han sakte i to timer.

Gjennomsnittshastigheten for hele sykkelturen er den gjennomsnittlige veksten til $s(t)$ fra $t = 0$ til $t = 5$. Dette blir

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{80 - 0}{5} = 16.$$

Gøyen holdt altså en gjennomsnittshastighet på 16 km/t i løpet av sykkelturen. ■

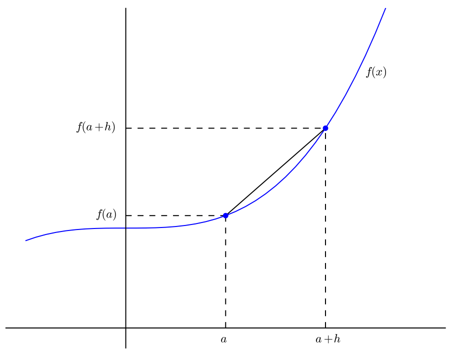
2.3 Veksten i et punkt

Vi har lyst til å finne ikke bare den gjennomsnittlige veksten til en funksjon mellom to punkter, men hvor raskt funksjonen vokser på ett bestemt sted. Vi begynner med å se på gjennomsnittsveksten fra punktet vi er interessert i til et punkt som ligger en liten avstand lenger borte, og så vil vi gjøre denne avstanden stadig mindre.

Hvis vi vil finne veksten til f i et punkt a, velger vi oss et lite tall h og ser på gjennomsnittsveksten fra a til $a + h$. Denne er

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

og den beskriver stigningstallet til den rette linjen på følgende figur:



Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 3x^2 + 1.$$

For to tall a og h kan vi finne gjennomsnittsveksten for $f(x)$ når x går fra a til $a+h$ som

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{3(a+h)^2+1-3a^2-1}{h} \\ &= \frac{3a^2+6ah+3h^2+1-3a^2-1}{h} \\ &= \frac{6ah+3h^2}{h} = 6a+3h.\end{aligned}$$

Så vi har for eksempel:

Gjennomsnittsveksten fra 2 til 2.5:	$6\cdot 2+3\cdot 0.5=13.5$
Gjennomsnittsveksten fra 2 til 2.1:	$6\cdot 2+3\cdot 0.1=12.3$
Gjennomsnittsveksten fra 2 til 2.001:	$6\cdot 2+3\cdot 0.001=12.003$

Hvis vi lar avstanden h bli mindre og mindre, nærmer gjennomsnittsveksten fra 2 til $2+h$ seg 12. Denne verdien er det vi ser på som veksten til f i punktet 2.■

Oppgave 4. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x)=x^2-x.$$

Finn gjennomsnittsveksten til f

a) fra 3 til 3.5.

b) fra 3 til 3.1.

c) fra 3 til 3.001. ■

Nå er vi klare til å definere veksten til en funksjon i et punkt, som vi kaller funksjonens *deriverte* i punktet.

Definisjon. La f være en funksjon og a et reelt tall. Vi definerer den **deriverte** av f i a til å være

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

dersom denne grenseverdien eksisterer og er endelig. Vi sier da at f er **deriverbar** i a. Vi bruker notasjonen $f'(a)$ for den deriverte av f i a. ■

Oppgave 5. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x)=x^2-x.$$

Finn $f'(3)$, altså den deriverte av f i 3. ■