Derivasjon

Øystein Skartsæterhagen

Forelesning i MA0003 14.09.2011

1 Den deriverte av en funksjon

La f være en funksjon, og a et reelt tall. Sist så vi at vi kunne finne stigningstallet til grafen til $f(x)$ i punktet $x = a$ ved å regne ut grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Vi kalte denne verdien for den deriverte til f i punktet a. I og med at vi kan gjøre dette for ethvert reelt tall a, gir det opphav til en ny funksjon, som vi kaller den deriverte av f, og skriver f'. Denne funksjonen tar inn et reelt tall x og gir ut stigningstallet til f ved x.

Definisjon. La f være en funksjon. Den **deriverte** av f er en ny funksjon f' definert ved

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Definisjonsmengden til funksjonen f' består av alle x som er slik at denne grenseverdien eksisterer og er endelig. Vi sier at f er **deriverbar** i punktet x hvis $f'(x)$ er definert. ■

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 2x + 4.$$

Vi vil finne funksjonen f'.

Vi bruker definisjonen av den deriverte, og beregner grenseverdien:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2x + 2h + 4) - (2x + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2. \end{aligned}$$

Den deriverte av f er altså konstantfunksjonen som er lik 2 overalt. Verdien av f' i et punkt a kan tolkes som stigningstallet til f i a. Siden f er en rett linje med stigningstall 2 stemmer dette bra: uansett hvilket punkt vi velger, har f stigningstall 2 der. ■

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

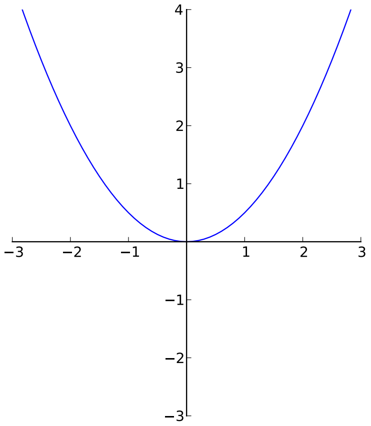
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

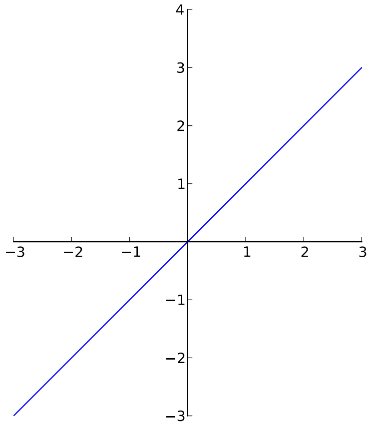
Vi vil finne funksjonen f'.

Vi bruker definisjonen av den deriverte, og beregner grenseverdien:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + xh + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{xh + \frac{1}{2}h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(x + \frac{h}{2}\right) = x. \end{aligned}$$

La oss se på grafene til funksjonene f og f':





Vi ser at $f(x)$ synker når x er negativ, men den flater ut ved $x = 0$ og begynner deretter å vokse raskere og raskere. Dette finner vi igjen i verdien av den deriverte funksjonen, som representerer stigningstallet i hvert punkt. For x-verdier der $f(x)$ synker, er $f'(x)$ negativ. For x-verdier der $f(x)$ stiger, er $f'(x)$ positiv, og jo raskere $f(x)$ stiger, jo høyere blir verdien av $f'(x)$. ■

Oppgave 1. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 3x^2 + 4x.$$

Finn den deriverte funksjonen f'. ■

2 Notasjon

Vi bruker to forskjellige typer notasjon for den deriverte. Den ene ble introdusert over: hvis f er en funksjon, skriver vi f' for den deriverte av f.

Den andre notasjonen er som følger. Hvis variabelen y representerer en funksjon av x, skriver vi

$$\frac{dy}{dx} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d}{dx}y$$

for den deriverte av y med hensyn på x. La f være funksjonen y representerer, så forholdet mellom y og x er gitt ved $y = f(x)$. Da er sammenhengen mellom den nye notasjonen og den vi har fra før at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x).$$

Notasjonen med $\frac{d}{dx}$ er praktisk når vi vil beskrive den deriverte av en funksjon som er gitt ved et uttrykk, uten å gi et navn til funksjonen. For eksempel så vi tidligere at hvis funksjonen f er definert ved

$$f(x) = 2x + 4,$$

så er den deriverte

$$f'(x) = 2.$$

Dette kan vi skrive kortere som

$$\frac{d}{dx}(2x + 4) = 2.$$

Oppgave 2. Finn

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x).$$

■

3 Deriverbarhet

Vi husker at en funksjon f er *deriverbar* i et punkt a dersom den deriverte

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

av f i a eksisterer. Vi vil nå finne noen kriterier for når en gitt funksjon er – eller ikke er – deriverbar i et gitt punkt.

Vi kan først bemerke at a må være i definisjonsmengden til f for at f skal være deriverbar i a. Hvis a ikke er i definisjonsmengden til f, kan vi ikke finne verdien $f(a)$ som inngår i uttrykket for den deriverte. Det er dessuten nødvendig at f er definert i et lite område omkring a, siden vi trenger verdiene $f(a + h)$, der h går mot 0. Men dette er ikke tilstrekkelig, som det følgende eksempelet viser.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x < 1, \\ 2 & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$$

Siden $f(x)$ har stigningstall 1 for $x < 1$ og stigningstall 0 for $x > 1$, er det lett å se at vi må ha

$$f'(x) = 1 \quad \text{for } x < 1 \qquad \text{og} \qquad f'(x) = 0 \quad \text{for } x > 1.$$

Men hva kan $f'(1)$ være? Etter definisjonen av den deriverte skal vi ha

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$

dersom denne grenseverdien eksisterer. La oss finne de tilsvarende ensidige grenseverdiene. Grenseverdien når h går mot 0 fra venstre er

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + h - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{h}{h} - \frac{1}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{h} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Grenseverdien når h går mot 0 fra høyre er

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.$$

Siden de ensidige grenseverdiene er ulike, eksisterer ikke grenseverdien

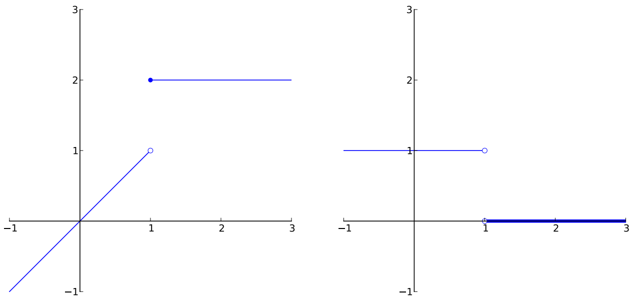
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h},$$

så f er ikke deriverbar i 1.

Vi har altså at den deriverte f' har definisjonsmengde $\mathbb{R} - \{1\}$ og er gitt ved

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1, \\ 0 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Grafene til f og f' ser slik ut:



$f(x)$ $\qquad$ $f'(x)$ ■

I dette eksempelet så vi at funksjonen f ikke var deriverbar i punktet der den har en diskontinuitet. Tilsvarende gjelder generelt: for at en funksjon skal være deriverbar i et punkt, må den også være kontinuerlig i det punktet. Vi formulerer dette som et teorem.

Teorem 1. La f være en funksjon og a et reelt tall. Hvis f er deriverbar i a, så er f også kontinuerlig i a. ■

Men en funksjon kan være kontinuerlig i et punkt uten å være deriverbar i punktet, som det neste eksempelet viser.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x < 1, \\ 1 & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$$

Siden $f(x)$ har stigningstall 1 for $x < 1$ og stigningstall 0 for $x > 1$, er det lett å se at vi må ha

$$f'(x) = 1 \ \text{ for } x < 1 \qquad \text{og} \qquad f'(x) = 0 \ \text{ for } x > 1.$$

La oss prøve å finne $f'(1)$. Per definisjonen av den deriverte skal denne være

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h},$$

dersom grenseverdien eksisterer. Som i forrige eksempel finner vi de tilsvarende ensidige grenseverdiene. Grenseverdien når h går mot 0 fra venstre er

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1 = 1.$$

Grenseverdien når h går mot 0 fra høyre er

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.$$

Siden de ensidige grenseverdiene er ulike, eksisterer ikke grenseverdien

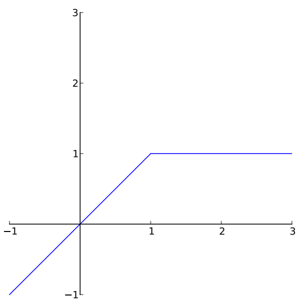
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h},$$

så f er ikke deriverbar i 1.

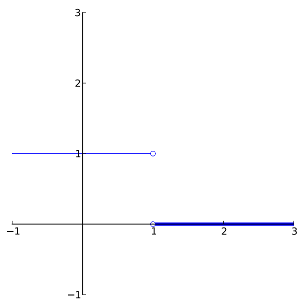
Vi har altså at den deriverte f' har $\mathbb{R} - \{1\}$ som definisjonsmengde og er gitt ved

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x < 1, \\ 0 & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Grafene til f og f' ser slik ut:



$f(x)$



$f'(x)$ ■

Generelt gjelder at en funksjon f ikke er deriverbar i punktet a dersom grafen til $f(x)$ har en «knekk» ved $x = a$.

Vi har til nå sett at en funksjon f ikke er deriverbar i et punkt a hvis f er diskontinuerlig i a eller har en «knekk» ved a. Men det finnes en mulighet til som får funksjonen til å ikke være deriverbar: at grenseverdien

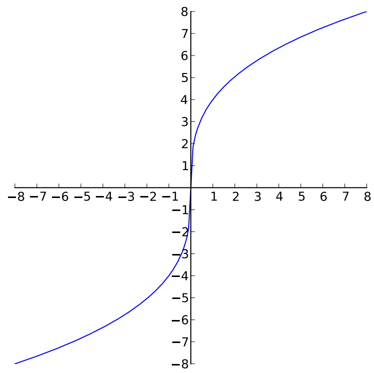
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

er ∞ eller $-\infty$. Dette skjer hvis grafen til $f(x)$ går rett opp eller rett ned ved $x = a$, altså hvis tangenten til grafen er en vertikal linje.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Grafen til f ser slik ut:



Ved $x = 0$ går grafen rett oppover. Det finnes altså ikke noe reelt tall som kan fungere som stigningstallet til grafen der (om den skulle hatt et stigningstall, måtte det vært ∞). Derfor er f ikke deriverbar i 0. ■

Vi kan oppsummere med følgende kriterier for deriverbarhet. For at en funksjon f skal være deriverbar i et punkt a, må alle disse kravene være oppfylt:

1. Funksjonen f er kontinuerlig i a.
2. Grafen til $f(x)$ har ikke noen «knekk» ved $x = a$.
3. Grafen til $f(x)$ har ikke vertikal tangent ved $x = a$.

Oppgave 3. Er f deriverbar i 2?

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b) $f(x) = |x - 2|$

c) $f(x) = |x|$ ■

4 Noen derivasjonsregler

Det er strevsomt å regne ut grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

hver gang man vil derivere en funksjon. For mange funksjoner som er på bestemte former finnes det enkle regler man kan benytte. Vi skal nå utlede noen av disse.

4.1 Konstantfunksjoner

La f være en konstantfunksjon, altså en funksjon på formen

$$f(x) = c,$$

der c er et reelt tall. Vi vil finne den deriverte funksjonen f'.

Vi bruker definisjonen og får:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

For konstantfunksjoner har vi altså regneregelen

$$\frac{d}{dx} c = 0.$$

Dette er også hva vi ville forvente. Siden en konstantfunksjon har samme verdi overalt, bør den alltid ha stigningstall 0.

4.2 Potenser av x

Vi vil finne de deriverte av alle funksjoner på formen

$$f(x) = x^n,$$

for naturlige tall n. Vi ser først på et eksempel på en slik funksjon.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^3.$$

Vi finner den deriverte f'. Definisjonen av den deriverte gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

■

Det generelle tilfellet gjøres helt tilsvarende som dette eksempelet. Siden uttrykket $(x+h)^n$ vil inngå i grenseverdien når vi skal derivere x^n, er det på sin plass å minne om binomialteoremet.

Teorem 2 (Binomialteoremet). La a og b være reelle tall og n et naturlig tall. Da er

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

■

La oss nå gå løs på å derivere x^n for et vilkårlig naturlig tall n. La f være funksjonen

$$f(x) = x^n.$$

Vi vil finne den deriverte funksjonen f'.

For tilfellet $n = 1$ er det lett å se at vi får $f'(x) = 1$. I det følgende vil vi anta at $n > 1$.

Vi begynner med å regne litt på uttrykket $(x+h)^n$. Vi bruker binomialteoremet, og skiller deretter ut de to første leddene fra summen:

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i \\ &= \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i \\ &= x^n + n x^{n-1} h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i.\end{aligned}$$

Ved å bruke definisjonen av den deriverte, og deretter sette inn uttrykket vi nettopp fant for $(x+h)^n$, får vi

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + n x^{n-1} h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{n x^{n-1} h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(n x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1} \right) \\ &= n x^{n-1}.\end{aligned}$$

Vi har altså følgende regneregel for den deriverte av en potens av x med naturlig eksponent:

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

En helt tilsvarende regel gjelder også når eksponenten ikke er et naturlig tall. Vi har

$$\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}$$

for et vilkårlig reelt tall a. Dette skal vi ikke vise.

Oppgave 4. Regn ut.

a) $\frac{d}{dx} x^5$

b) $\frac{d}{dx} x^{1.7}$

c) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right)$

d) $\frac{d}{dx} \sqrt{x}$ ■

4.3 Skalering med en konstant

La f være en funksjon og c et reelt tall, og definer en ny funksjon g ved

$$g(x) = c \cdot f(x).$$

Vi antar at vi allerede vet hva den deriverte av f er, og vil finne den deriverte av g uttrykt ved f'.

Fra definisjonen får vi

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot f(x+h) - c\cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(c\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) = c\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= c\cdot f'(x). \end{aligned}$$

Vi har altså følgende regneregel for den deriverte av en konstant ganger en funksjon:

$$\frac{d}{dx}\big(c\cdot f(x)\big) = c\cdot \frac{d}{dx} f(x).$$

Oppgave 5. Regn ut.

a) $\frac{d}{dx} 3x^2$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3}\right)$ ■

4.4 Summer

La f og g være funksjoner, og definer en ny funksjon F ved

$$F(x) = f(x) + g(x).$$

Vi antar at vi allerede vet hva de deriverte f' og g' av henholdsvis f og g er, og vil finne den deriverte av F uttrykt ved disse.

Fra definisjonen får vi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) + \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Vi har altså følgende regneregel for den deriverte av summen av to funksjoner:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x).$$

Oppgave 6. Regn ut.

a) $\frac{d}{dx}(x^7 + 3x^4 - 7x^2 + 5x + 12)$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x^2} + \sqrt[3]{x}\right)$ ■