Derivasjonsregler og høyereordens deriverte

Øystein Skartsæterhagen

Forelesning i MA0003 19.09.2011

1 Derivasjonsregler

Forrige gang så vi følgende derivasjonsregler:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}c &= 0 && \text{for } c \in \mathbb{R}, \\
\frac{d}{dx}x^a &= ax^{a-1} && \text{for } a \in \mathbb{R}, \\
\frac{d}{dx}\big(c \cdot f(x)\big) &= c \cdot f'(x) && \text{for } c \in \mathbb{R} \text{ og en funksjon } f, \\
\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) &= f'(x) + g'(x) && \text{for funksjoner } f \text{ og } g.
\end{aligned}
$$

I dag skal vi finne flere derivajonsregler. Hvis vi har to funksjoner f og g, og kjenner de deriverte f' og g', skal vi se hvordan vi kan finne de deriverte av produktet

$$f(x) \cdot g(x),$$

av kvotienten

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

og av den sammensatte funksjonen

$$f \circ g.$$

1.1 Produktregelen

La f og g være funksjoner, og anta at vi vet hva de deriverte f' og g' er. Vi vil finne den deriverte av produktet av f og g, altså

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big).$$

Vi har sett at den deriverte av en sum av to funksjoner er lik summen av de deriverte av funksjonene. Dermed kunne vi gjettet at den deriverte av produktet skulle vært produktet av de deriverte, altså

$$f'(x) \cdot g'(x).$$

Men det stemmer ikke, som vi kan se av det følgende eksempelet.

Eksempel. La funksjonene f og g være gitt ved

$$f(x) = x^2,$$
$$g(x) = x^3.$$

De deriverte av f og g er

$$f'(x) = 2x,$$
$$g'(x) = 3x^2.$$

Produktet av disse er

$$f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3.$$

Men den deriverte av produktet av f og g er

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(x^2 \cdot x^3\Big) = \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4. \qquad \blacksquare$$

La oss nå finne ut hva den deriverte

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)$$

av et produkt av to funksjoner faktisk er.

La f og g være funksjoner, og definer en ny funksjon F ved

$$F(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Vi vil finne F'. Vi bruker først definisjonen av den deriverte, og så gjør vi et triks med å trekke fra og legge til $f(x) \cdot g(x+h)$ i telleren:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \lim_{h \to 0} \Big(g(x+h) \Big) \\
&\quad + \lim_{h \to 0} \Big(f(x) \Big) \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Vi har altså regelen

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

for den deriverte av produktet av to funksjoner.

1.2 Kvotientregelen

La f og g være funksjoner, og anta at vi vet hva f' og g' er. Definer funksjonen F ved

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Vi vil finne den deriverte av F.

Vi bruker definisjonen av den deriverte, og gjør et lignende triks som da vi fant den deriverte av et produkt. Her er det $f(x) \cdot g(x)$ vi må trekke fra og legge til for at vi skal komme frem til noe fornuftig.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x+h)} - \frac{f(x)\cdot g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))\cdot g(x) - f(x)\cdot (g(x+h) - g(x))}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))\cdot g(x) - f(x)\cdot (g(x+h) - g(x))}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\right) \\
&= \left(\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\cdot g(x) - f(x)\cdot\left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)\right)\cdot \frac{1}{\big(g(x)\big)^2} \\
&= (f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x))\cdot \frac{1}{\big(g(x)\big)^2} \\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.
\end{aligned}$$

Vi har altså regelen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

for den deriverte av kvotienten av to funksjoner.

Oppgave 1. Finn $f'(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^3+3}{x^2-4}$ ■

1.3 Sammensatte funksjoner

La A, B og C være mengder, og la

$$f\colon B \to C \qquad \text{og} \qquad g\colon A \to B$$

være funksjoner mellom disse mengdene. Da definerer vi den *sammensatte funksjonen*

$$f \circ g\colon A \to C$$

av f og g ved regelen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

For å anvende den sammensatte funksjonen $f \circ g$ på en verdi x, anvender vi altså først g på x, og så anvender vi f på resultatet av dette.

Eksempel. La funksjonene f og g være gitt ved

$$\begin{aligned} &f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, && f(x) = \sqrt{x}; \\ &g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty), && g(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Siden definisjonsmengden til f er den samme som verdimengden til g (begge er $(0,\infty)$), kan vi lage den sammensatte funksjonen $f \circ g$. Definisjonsmengden til denne blir definisjonsmengden til g, og verdimengden blir verdimengden til f:

$$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Regelen for å anvende funksjonen $f \circ g$ blir

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2}.$$

Vi kan også lage den sammensatte funksjonen $g \circ f$. Denne blir

$$\begin{aligned} g \circ f\colon &(0,\infty) \to (0,\infty) \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) &= (\sqrt{x})^2 + 2 = x + 2. \end{aligned}$$ ■

Eksempel. La funksjonene f og g være gitt ved

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f(x) = \sin x + \cos x; \\ &g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && g(x) = 3x^3 - 2x + 4. \end{aligned}$$

Den sammensatte funksjonen $f \circ g$ blir

$$\begin{aligned} f \circ g\colon &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(3x^3 - 2x + 4) \\ &= \sin(3x^3 - 2x + 4) + \cos(3x^3 - 2x + 4). \end{aligned}$$ ■

Oppgave 2. La funksjonene f og g være gitt ved

$$\begin{aligned} &f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, && f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; \\ &g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty), && g(x) = x^2 - x + 4. \end{aligned}$$

Finn den sammensatte funksjonen $f \circ g$. ■

Oppgave 3. La r være kvadratrotfunksjonen:

$$r\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \sqrt{x}.$$

La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \sqrt{3x - 8}.$$

Finn en funksjon g slik at $f = r \circ g$. ■

1.4 Kjerneregelen

La f og g være funksjoner. Anta at verdimengden til g er den samme som definisjonsmengden til f, slik at vi kan lage den sammensatte funksjonen $f \circ g$. Vi vil finne den deriverte $(f \circ g)'$ av denne sammensatte funksjonen, uttrykt ved f' og g'.

Vi begynner med et eksempel der det er lett å regne ut hva $(f \circ g)'$ er.

Eksempel. La funksjonene f og g være gitt ved

$$f(x) = x^2, \qquad\qquad g(x) = 3x - 1.$$

Da er den sammensatte funksjonen $f \circ g$ gitt ved

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1.$$

Den deriverte $(f \circ g)'$ blir dermed

$$(f \circ g)'(x) = 18x - 6.$$

La oss undersøke hvordan denne kan knyttes til de deriverte av f og g. Vi har

$$f'(x) = 2x \qquad \text{og} \qquad g'(x) = 3.$$

Vi velger oss punktet 1 på x-aksen, og vil se om den deriverte $(f \circ g)'(1)$ av den sammensatte funksjonen i 1 kan uttrykkes ved f' og g'. Siden

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2),$$

virker det rimelig at vi vil ha med stigningstallet til f i punktet 2 (ikke 1), altså $f'(2)$. Men $f \circ g$ vokser raskere enn f, siden x-verdiene dyttes gjennom g (som multipliserer dem med 3) før de sendes inn i f. Vi kan derfor gjette at det vi vil ha er $f'(2)$ ganget med $g'(1)$, altså

$$f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Vi har at

$$(f \circ g)'(1) = 18 \cdot 1 - 6 = 12,$$

så for punktet 1 har vi

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1).$$

Gjelder tilsvarende generelt? Vi regner ut:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(3x - 1) \cdot 3 = 2 \cdot (3x - 1) \cdot 3 = 18x - 6 = (f \circ g)'(x).$$

Vi har altså at den deriverte av den sammensatte funksjonen kan uttrykkes som

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$ ■

Basert på observasjonen i eksempelet over formulerer vi følgende teorem, som vi ikke skal bevise.

Teorem 1 (Kjerneregelen). La f og g være funksjoner. Anta at verdimengden til g er den samme som definisjonsmengden til f, slik at den sammensatte funksjonen $f \circ g$ er definert. Da er

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad \blacksquare$$

Eksempel. Vi vil finne

$$\frac{d}{dx}\sqrt{4x^2 - 2x + 5}.$$

Definer funksjonene F, f og g ved

$$\begin{aligned} F(x) &= \sqrt{4x^2 - 2x + 5}, \\ f(x) &= \sqrt{x}, \\ g(x) &= 4x^2 - 2x + 5. \end{aligned}$$

Da er $F = f \circ g$. Vi finner de deriverte av f og g:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ g'(x) &= 8x - 2. \end{aligned}$$

Nå kan vi bruke kjerneregelen til å finne den deriverte av F:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (8x - 2) = \frac{4x - 1}{\sqrt{4x^2 - 2x + 5}}.$$

Vi har altså

$$\frac{d}{dx}\sqrt{4x^2 - 2x + 5} = \frac{4x - 1}{\sqrt{4x^2 - 2x + 5}}. \qquad \blacksquare$$

Oppgave 4. Finn

a) $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$

b) $\frac{d}{dx}\big(2 \cdot (5x^8 - x^5 + 7x - 3)^{42}\big)$ $\blacksquare$

2 Høyereordens deriverte

Hvis vi har en funksjon f, kan vi finne den deriverte f'. Denne er også en funksjon, og vi kan finne dens deriverte, som er f''. Funksjonen f'' kalles den *andrederiverte* av f.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1.$$

Hvis vi deriverer f, får vi

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4.$$

Hvis vi deriverer f', får vi den andrederiverte av f:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x.$$

Hvis vi deriverer f'', får vi den tredjederiverte av f:

$$f'''(x) = 24x - 12.$$

Hvis vi deriverer f''', får vi den fjerdederiverte av f:

$$f''''(x) = 24.$$

Hvis vi deriverer f'''', får vi den femtederiverte av f:

$$f'''''(x) = 0.$$

■

For å beskrive den n-tederiverte av f, for et vilkårlig naturlig tall n, bruker vi notasjonen $f^{(n)}$. Vi har altså

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f', \\ f^{(2)} &= f'', \\ f^{(3)} &= f''', \end{aligned}$$

og så videre.

Eksempel. Hvis $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1$ (som i forrige eksempel), så er $f^{(n)}(x) = 0$ for alle $n \geq 5$. ■

Oppgave 5. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x + 18.$$

Finn

a) $f''(x)$

b) $f^{(3)}(x)$

c) $f^{(10)}(x)$ ■

La f være en funksjon og a et reelt tall. Vi vet at $f'(a)$ beskriver hvor raskt $f(x)$ stiger eller synker ved $x = a$. Verdien $f''(a)$ av den andrederiverte i a beskriver hvor raskt den førstederiverte $f'(x)$ stiger eller synker ved $x = a$.

Eksempel. La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 5.$$

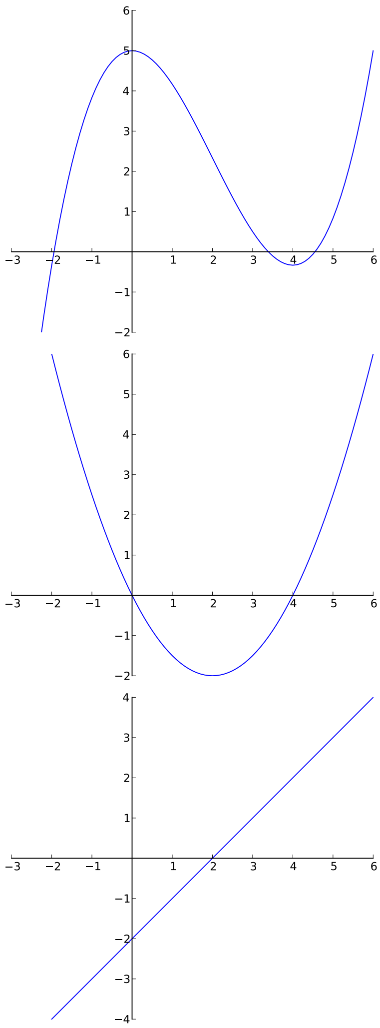
Vi finner den deriverte og den andrederiverte av f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x, \\ f''(x) &= x - 2. \end{aligned}$$

$f(x)$:

$f'(x)$:

$f''(x)$:



Figur 1: En funksjon og dens deriverte og andrederiverte.

Grafene til f, f' og f'' er vist i figur 1. Den andrederiverte beskriver hvor raskt den deriverte endrer seg. Vi ser at for $x < 2$ er den andrederiverte negativ, og her har $f(x)$ avtagende vekst (den vokser stadig saktere). For $x > 2$ er den andrederiverte positiv, og her har $f(x)$ økende vekst (den vokser stadig raskere). ■