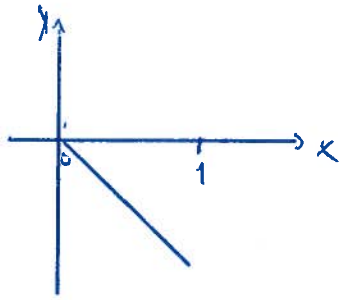
Egenskaper ved bestemte integral , Bitt. 4.4

MA0003
17.04.

Eks:

$f(x) = -x \qquad x \in [0,1]$



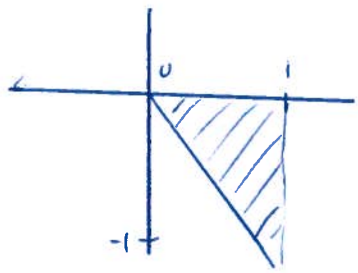
Det ubestemte integralet

$$\int -x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

La $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$ være en antider.

$$\int_0^1 -x \, dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 0 = -\frac{1}{2}$$

Vi får altså : $-\left(\int_0^1 -x \, dx \right) =$ Arealet avgrenset av $f(x)$, x-aksen , $x=0$ og $x=1$



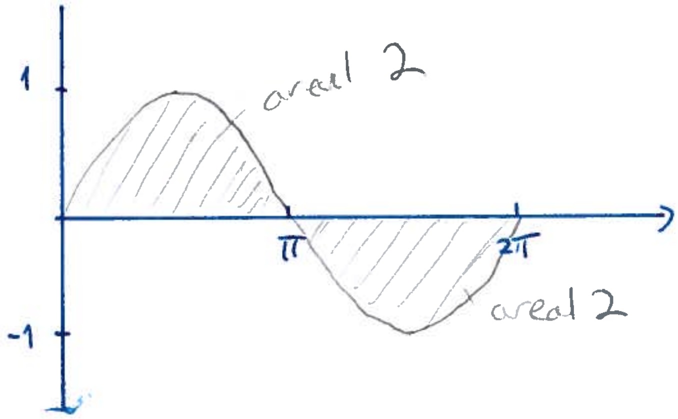
Eks:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -1 - (-(-1)) = -2$$

geometrisk tolkning



Hvis $f(x) \leq 0$ på intervallet $[b,c]$ er

Arealet A_1 avgrenset av grafen, $x=b$, $x=c$ og x-aksen

$$A_1 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

I eksemplet: $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$ $\quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$

Arealet avgrenset av grafen $x=0$, $x=2\pi$ og x-aksen blir

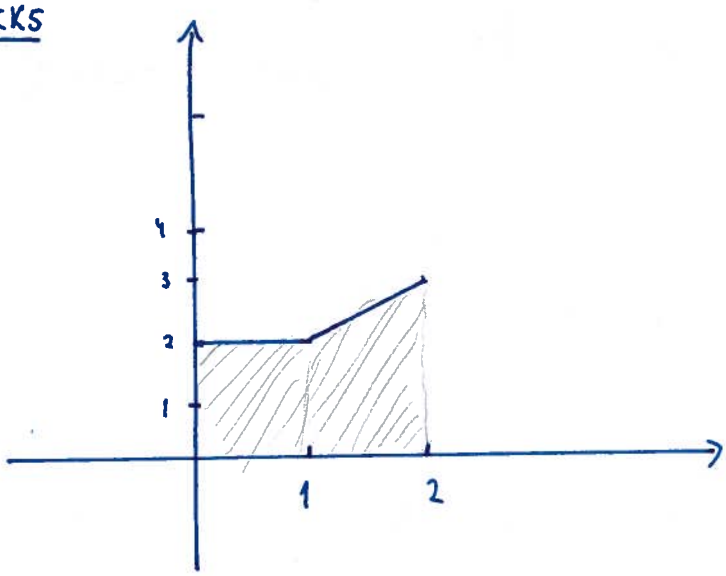
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx\right) = 2 + (-(-2)) = 2+2 = 4$$

NB! Formelen

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

holder generelt når $a < b < c$

Eks



$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,1) \\ x+1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Her kan vi finne antiderivert $F_0(x) = 2x$ på intervallet $(0,1)$
og vi kan finne antiderivert $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ —"— $(1,2)$

Men! vi finner ingen $F(x)$ s.a. $F'(x) = f(x)$ på $(0,2)$

$F_1(2) - F_0(0) = (\frac{1}{2}2^2 + 2) - 0 = 4$ som er ulik arealet under kurven (arealet under kurven er $4\frac{1}{2}$)

NB! Formelen $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ holder bare når

$F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$

Eks (forts.)

For samme funksjon $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,1) \\ x+1 & x \in [1,2) \end{cases}$

Kan vi bruke

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 x+1\,dx$$

$$\int_0^1 2\,dx = F_0(1) - F_0(0) = 2-0 = 2 \quad \text{der } F_0 = 2x$$

$$\int_1^2 x+1\,dx = F_1(2) - F_1(1) = \tfrac{1}{2}2^2+2 - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1^2+1\right)$$

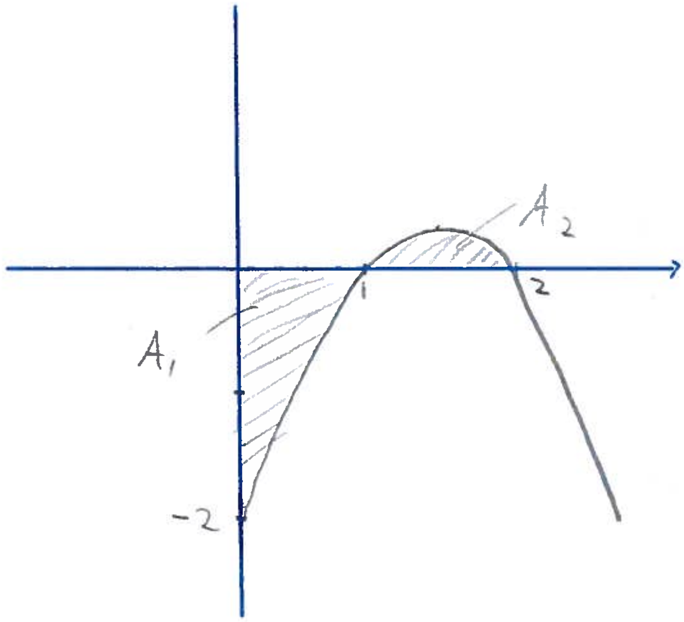
$$= 2+2-\tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2} \quad , \text{ der } F_1(x) = \tfrac{1}{2}x^2+x$$

Oppg. La $f(x) = \begin{cases} x+4 & x \in [1,2) \\ 10-x^2 & x \in (2,3] \end{cases}$

Beregn $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Eks

La $f(x) = -x^2 + 3x - 2$



Finn arealet av det skraverte området!

$$A_1 = -\int_0^1 -x^2 + 3x - 2 \, dx = -\left(F(1) - F(0)\right)$$

$$A_2 = \int_1^2 -x^2 + 3x - 2 \, dx = F(2) - F(1)$$

der $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$

$$A_1 + A_2 = F(2) - 2 \cdot F(1) + F(0)$$

$$= -\frac{1}{3}2^3 + \frac{3}{2}2^2 - 2 \cdot 2 - 2\left(-\frac{1}{3}1^3 + \frac{3}{2}1^2 - 2\right) + 0$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{2}{3} - 3 + 4 = 1$$

Integrasjonsteknikker - substitusjon

B.H. 4.5

Husk I. Leibniz notasjon $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

når $f(x) = y$

Eks: $y = f(x) = x^3$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$

$y = f(x) = \sin x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \cos x$

Husk II. Kjerneregelen

Hvis $f(x) = h \circ u(x)$

er $f'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x)$

Eks. $f(x) = \sin(3x^2) = \sin(u(x))$, der $u(x) = 3x^2$

Altså: f er sammensatt av funksjonene $u(x) = 3x^2$ og

$h(u) = \sin u$

$$x \xrightarrow{u} \underset{3x^2}{\overset{}{u(x)}} \xrightarrow{h(u) = \sin u} \underset{\sin 3x^2}{\sin u}$$

$u(x) = 3x^2$, $\sin u = \sin 3x^2$

Dermed får vi $f'(x) = h'(u) \cdot u'(x)$

$$= (\cos u) \cdot 6x$$

$$= 6x \left(\cos 3x^2\right)$$

Eks.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$x \xrightarrow{u(x)=1-x^2} \underset{\substack{\| \\ u}}{1-x^2} \xrightarrow{h(u)=\sqrt{u}} \underset{\substack{\| \\ \sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = h'(u)\, u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \,(-2x)$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Med Leibniz notasjon sier kjerneregelen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad \left(\Leftrightarrow f'(x) = h'(u)\, u'(x) \right)$$

når $y = f(x) = h(u(x))$ $\qquad \left(y = h(u) \text{ så } \frac{dy}{du} = h'(u) \right)$

Integrasjon v.h.a. substitusjon går ut på å kjenne igjen uttrykk på formen $h'(u) \cdot u'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x)$

Eks: Løs integralet

$$\int 2x\,(x^2+1)^2\,dx$$

La $u(x) = x^2+1$, da er $\frac{du}{dx} = 2x \quad (= u'(x))$

$$\int 2x\,(x^2+1)^2\,dx = \int (x^2+1)^2 \underbrace{2x\,dx}_{du}$$

$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$$

(NB! I dette eksemplet kunne vi skrevet om $2x(x^2+1)^2 = 2x^5+4x^3+4x$)

Eks

$$\int 2xe^{x^2}\,dx$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \qquad du = 2x\,dx$

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C$$

$$= e^{x^2} + C$$

Eks $\int \frac{1}{x+2}\,dx$

La $u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1 \qquad du = dx$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$$

$$= \ln(x+2) + C \qquad (\text{for } x > -2)$$

Eks $\int \frac{x}{x-2}\,dx$

La $u = x-2$

$\frac{du}{dx} = 1 \qquad du = dx$

$$\int \frac{x}{x-2}\,dx = \int \frac{u+2}{u}\,du = \int 1 + \frac{2}{u}\,du$$

$$= u + 2\ln u = x-2 + 2\ln(x-2) + C$$

$$(\text{for } (x>2))$$

Oppg

Løs $\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx$ v.h.a. subsitusjonen

$u = 1+x^3$