MA0003

19. okt

Eks:

Forbruket av penger til iskrem i familien B

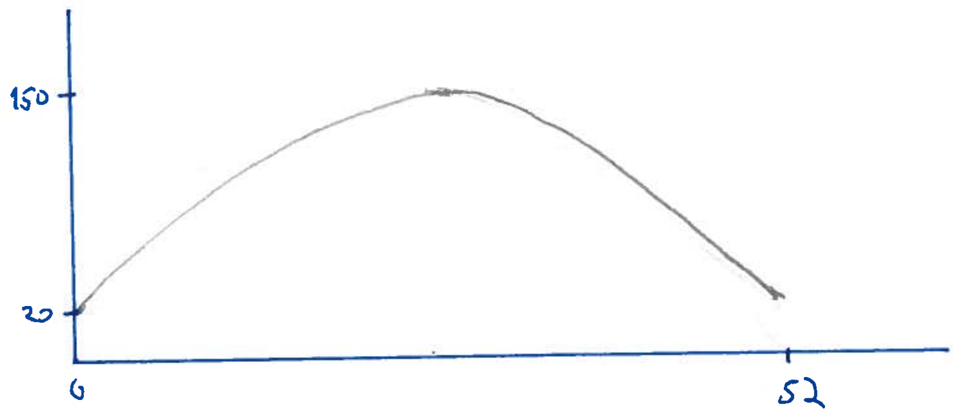
er gitt ved

$$f(x) = 20 + 130 \cdot \sin \frac{\pi}{52} x \qquad \text{kr. / uke}$$

Merk $f(0) = 20$

$f(26) = 150 \quad \left(= 20 + 130 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 20 + 130 \right)$

S.a. forbruket varierer mellom ca 20 kr pr uke og 150 kr pr uke



Forbruket for første 13 uker blir da

$$\int_0^{13} 20 + 130 \cdot \sin \frac{\pi}{52} x \quad dx$$

Forbruket for hele året blir

$$\int_0^{52} 20 + 130 \cdot \sin \frac{\pi}{52} x \quad dx$$

Oppgave: beregn disse!

$\boxed{\text{Delvis integrasjon}}$

B:H. 4.6.

Husk - produktregelen for derivasjon

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) \cdot g(x) = (f(x) g(x))' - f(x) \cdot g'(x) \qquad (*)$$

Vi skal finne antiderivert for $h(x)$, altså løse det

ubestemte integralet $\int h(x)\,dx$

Ide: hvis $h(x) = u(x) \cdot v(x)$ og vi kan finne antiderivert

for enten $u(x)$ eller $v(x)$ (eller begge), kan vi prøve å

forenkle $\int h(x)\,dx$ ved å bruke $(*)$.

Vi har $\int f'(x)\, g(x)\,dx = \int (f(x) \cdot g(x))'\,dx - \int f(x) g'(x)\,dx$

$$\Rightarrow \quad \int f'(x)\, g(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f(x)\, g'(x)\,dx \qquad (**)$$

Vi kan prøve å skrive $h(x) = f'(x)\,g(x)$ for passende valg av $f(x)$ og $g(x)$, og så bruke (**) for å beregne $\int h(x)\,dx$.

Eks

$$\int x e^x \, dx$$

e^x er lett å "antiderivere"

La $f'(x) = e^x$ $\quad (\Rightarrow f(x) = e^x)$

La $g(x) = x$ $\quad (\Rightarrow g'(x) = 1$

$$\int x e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx \qquad \text{ifølge } (**)$$

$$= x \cdot e^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

Eks

(noen ganger er det lurt å velge $f'(x) = 1$)

$$\int \ln x \quad dx \qquad\qquad (x > 0)$$

La $f'(x) = 1$ $\Rightarrow$ $f(x) = x$
$g(x) = \ln x$ $\quad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$ i følge (**)

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x + C$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

Eks

$$\int_2^4 \ln x \, dx = F(4) - F(2) \qquad F(x) = x \cdot \ln x - x$$

$$= 4(\ln 4 - 1) - 2(\ln 2 - 1)$$

$$= \ln 4^4 - 4 - \ln 2^2 + 2$$

$$= \ln \frac{4^4}{2^2} - 2 = \ln 64 - 2$$

Eks

(samme eksempel med annen oppdeling)

$$\int x \ln x \, dx$$

$f'(x) = \ln x \qquad f(x) = x \cdot \ln x - x$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = (x \cdot \ln x - x)x - \int (x \cdot \ln x - x) \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$2 \int x \cdot \ln x \, dx = x^2 \ln x - x^2 + \int x \, dx$$

$$= x^2 \ln x - x^2 + \frac{1}{2} x^2$$

$$= x^2 \ln x \div \frac{1}{2} x^2$$

$$\Downarrow$$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \div \frac{1}{4} x^2 + C$$

Eks

$$\int x \cdot \cos x \, dx$$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos x \qquad g(x) = \sin x$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

NB! Vi bør sjekke at $(x \sin x + \cos x)' \stackrel{?}{=} x \cos x$

(v.h.a. produktregelen)

$$\| $$

$$(x)' \sin x + x(\sin x)' + (\cos x)'$$

$$\| $$

$$\sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

Eks

$$\int x \cdot \ln x \, dx \qquad (x > 0)$$

$f'(x) = x \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Eks

(noen ganger må vi repetere...)

$$\int x^2 e^x \, dx$$

$f'(x) = e^x$ $\quad\quad$ $f(x) = e^x$

$g(x) = x^2$ $\quad\quad$ $g'(x) = 2x$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x \, dx}_{\text{dette har vi løst før, v.h.a. delvis integrasjon}}$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) + C$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Eks

(noen ganger må vi substituere...)

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx$$

$u = \sqrt{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, du = 2u \cdot du$$

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = \int e^u \cdot 2u \, du = 2\underbrace{\int u e^u \, du}_{\text{dette har vi løst v.h.a. delvis int.}} = 2\left(ue^u - e^u\right) + C$$

$$2\left(ue^u - e^u\right) + C = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$$