Differensialligninger

B.H. 5.7

Differensialligninger er ligninger som inneholder den deriverte y' (og/eller noen ganger høyere ordens deriverte $y'', y''', \ldots$), der funksjonen $y = f(x)$ er den ukjente.

Eks:

$$y' = e^x$$
$$\Downarrow$$
$$y = e^x + C$$

Vi har altså allerede løst enkle diff. ligninger v.h.a. antiderivasjon (eller ubestemte integral)

I eksemplet over, kan vi istedet bruke Leibniz' notasjon

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$
$$\Downarrow$$
$$dy = e^x\,dx$$

og løse ved å integrere på begge sider

$$\int dy = \int e^x\,dx$$

som gir $y + C_1 = e^x + C_2$ vi lar $C = C_2 - C_1$

og skriver $y = e^x + C$

som altså er den <u>generelle</u> løsningen av $y' = e^x$.

Dvs. alle løsninger av $y' = e^x$ er på formen $y = e^x + C$

Vi har også sett på initialverdier (randverdier) som kan gi oss <u>spesielle</u> løsninger av diff. ligninger

Eks (fra 12 okt, side 3, oppgave)

Finn $F(x)$ s.a. $F'(x) = x^3 + 5x^2 + 2$ og $F(1) = 4$

altså $F'(x) = \frac{dF}{dx} = x^3 + 5x^2 + 2$

$$dF = x^3 + 5x^2 + 2 \, dx$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 2x + C$$

$$F(1) = 4 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{3} + 2 + C = 4$$

$$\frac{3}{12} + \frac{20}{12} + \frac{24}{12} + C = 4$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{12}$$

Slik at $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{12}$

er løsning av initialverdiproblemet (randverdiproblemet)

$$\frac{dF}{dx} = x^3 + 5x^2 + 2$$

$$F(1) = 4$$

Så langt: har sett på ligninger på formen

$y' = f(x)$ som (noen ganger...) kan løses direkte v.h.a. antiderivasjon

Nå: skal se på diff.ligVn. der både y' og y inngår.

Eksempel:

$$y' = y \quad \left(\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \right)$$

Vi vet at $y = e^x$ er løsning siden $(e^x)' = e^x$

Vi vet og at $y = 2e^x$ er løsning $(2e^x)' = 2(e^x)' = 2e^x$

<u>men</u> $e^x + 2$ er <u>ikke</u> løsning $(e^x+2)' = e^x \neq e^x + 2$

Generell løsning

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{y} dy = dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\ln y} = e^{x+c} = e^x e^c$$

$$\Downarrow$$

$$y = e^c e^x = C' e^x \quad \text{der } C' = e^c$$

så alle løsninger er på formen $y = C'e^x$ for en konstant C'

Eks $y' = xy$

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{\frac{1}{2}x^2} = C' e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Diff. ligninger som kan skrives på formen $f(y)dy = g(x)dx$ kalles separable, og kan løses ved å "integrere på begge sider".

Eks $\frac{dy}{dx} = 4\frac{x}{y}$ er separabel, siden den er ekv. med

$$y\,dy = 4x\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}y^2 = 2x^2 + C$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 = 4x^2 + C'$$

$$\Updownarrow$$

$y = \sqrt{4x^2 + C'}$ eller $y = -\sqrt{4x^2 + C'}$

Eks

(Eksponentell vekst)

Gitt en bakterie-kultur med $y(t)$ bakterier ved tida t. (målt i sek.)

Anta $y(0) = 1000$. Anta vekstraten er gitt ved

$$y'(t) = 0{,}01 \cdot y$$

Finn $y(t)$,

og finn ut hvor mange sekunder det tar før vi har 100.000 bakterier.

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}01\, y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{y}\, dy = 0{,}01\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y = 0{,}01 t + C'$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\ln y} = e^{0{,}01 t + C'}$$

$$y = C e^{0{,}01 t} \qquad (\text{der } C = e^{C'})$$

$$y(0) = 1000 \Rightarrow 1000 = C e^{0} = C$$

$$y = 1000 e^{0{,}01 t}$$

$$100000 = 1000 e^{0{,}01 t} \Rightarrow e^{0{,}01 t} = 100 \Rightarrow 0{,}01 t = \ln 100 \Rightarrow$$

$$t = 100 \cdot \ln 100 = 461$$

Eks

Aksjekursen $A(t)$ ved tiden $t=0$ er 100 kr

(tiden: ~~ukes~~ år)

Anta $\frac{dA}{dt} = 3(200-A)$

Finn $A(t)$, og finn når $A(t) = 150$, hva er aksjekursen etter 1 år

$$\frac{dA}{200-A} = 3\,dt$$

Må løse $\int \frac{1}{200-A}\,dA$ og $\int 3\,dt = 3t + C$

ved substitusjon: $\int \frac{1}{200-A}\,dA = -\ln(200-A) + C'$

$$-\ln(200-A) = 3t + C''$$

$$\ln(200-A) = -3t + C'''$$

$$200-A = e^{-3t+C'''} = \tilde{C}e^{-3t}$$

$$A = 200 - \tilde{C}e^{-3t}$$

$$A(0) = 100 = 200 - \tilde{C}e^{0} \Rightarrow \tilde{C} = 100$$

$$A(t) = 200 - 100e^{-3t}$$

Når er $A(t) = 150$

$$200 - 100e^{-3t} = 150$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-3t} = 0{,}5$$

$$-3t = \ln 0{,}5$$

$$t = \frac{-\ln 0{,}5}{3} = 0{,}23 \text{ år.}$$

$$A(1) = 200 - 100\,e^{-3}$$

$$= 200 - 100 \cdot 0.05 = 195$$

NB!

Funksjonen $f(x) = \ln x$ er bare definert for $x > 0$,

og $f'(x) = \frac{1}{x}$ for $x > 0$, er den deriverte

Funksjonen $f(x) = \ln |x|$ er definert for $x \neq 0$

og $f'(x) = \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$, er den deriverte.

I eksemplene på side 3 og 4, når vi finner antiderivert

for $\frac{1}{y}$, altså løser $\int \frac{1}{y}\, dy$, antar vi (uten å nevne det)

at $y > 0$. Når vi så løser diff.lign.

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{y}\, dy = dx$$

$$\Downarrow$$

$$\ln y = x + C$$

$$\Downarrow$$

$$y = e^{\ln y} = e^{x + C} = C' e^{x} \qquad C' = e^{C}$$

vil $C' = e^{C}$ alltid være positiv.

Metoden gir altså bare løsningene for y der $y(x) = C' e^{x}$

er positiv.

Men: f.eks. $y(x) = -2e^x$ er også en løsning

av $\frac{dy}{dx} = y$.

Hvis vi velger $\ln|y|$ som antiderivert (i stedet for $\ln y$),

får vi også denne, og andre, negative løsninger.

$$\frac{1}{y}\,dy = dx$$

$$\Downarrow$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{x+C} = C'e^x \qquad C' > 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C'e^x \quad \text{eller} \quad y = -C'e^x \qquad C' > 0$$

eller m.a.o. $\quad y = C''e^x \qquad C'' \neq 0$