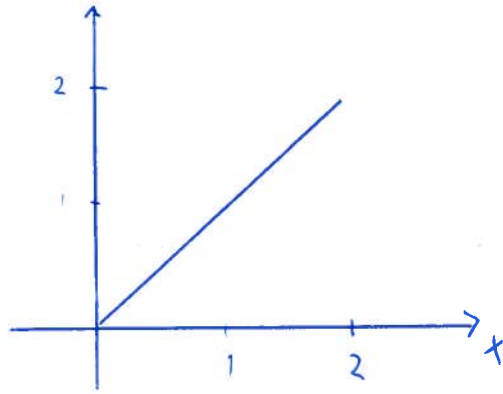


## Volum beregninger

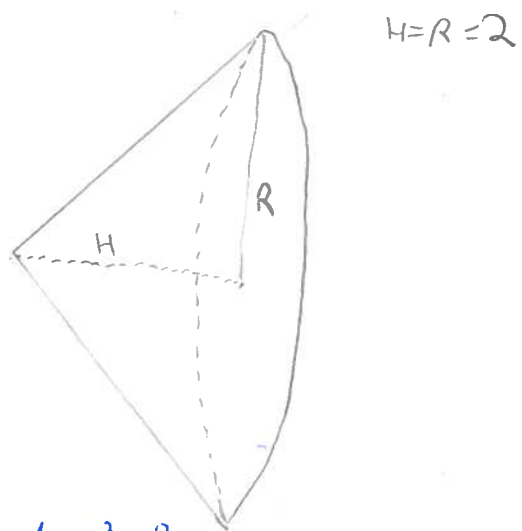
Bl. 5.6.

Betrakt funksjonen

$$f(x) = x \quad x \in [0, 2]$$



Hvis vi dreier kurven rundt  
x-aksen får vi en kjegle  
med høyde 2 og radius 2  
( $H=2, R=2$ )



Volumet av en

kjegle er  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$

(Radius  $R$ , høyde  $H$ )

Volumet av denne keglen blir da  $\frac{1}{3} \pi 2^3 = \frac{8}{3} \pi$

Betrakt funksjonen

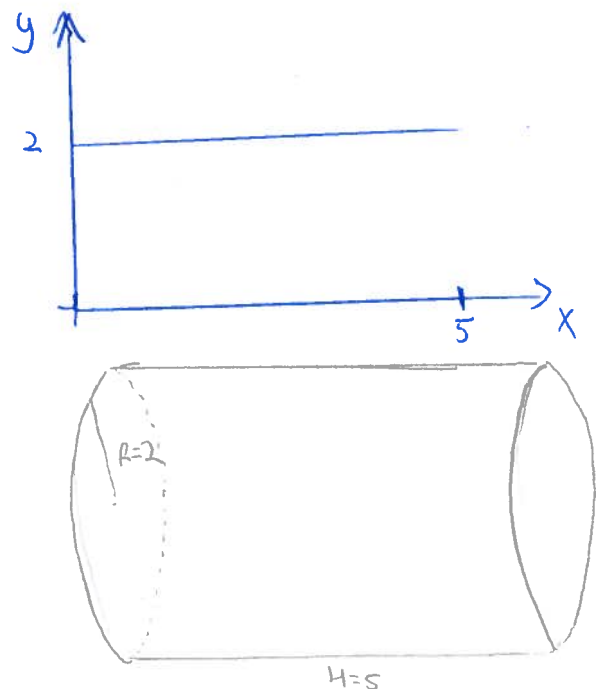
$$f(x) = 2 \quad x \in [0, 5]$$

Dreid om x-aksen, får vi  
en sylinder med høyde  $H=5$ ,  
og radius  $R=2$

Volum av sylinder:  $\pi R^2 H$

Volumet av denne sylinderen

$$\pi 2^2 \cdot 5 = 20 \pi$$



Generelt:

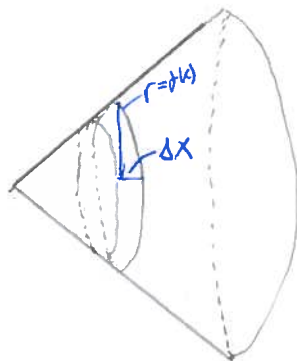
La  $f(x)$  være en kontinuerlig funksjon på et intervall  $[a, b]$ . Da er volumet av omdreingslegemet (legemet som "skjæres ut" når kurven dreies rundt  $x$ -aksen), gitt ved

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Husk: En disk med radius  $r$  har areal  $\pi r^2$   
 En tynn skive med radius  $r$  og tykkelse  $\Delta x$  har dermed volum

$$\pi r^2 \cdot \Delta x$$

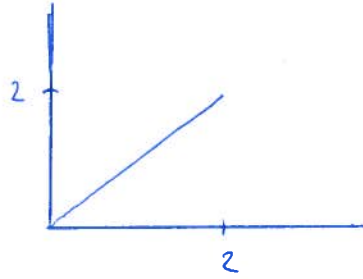
Vi tenker oss omdreingslegemet delt opp i tynne skiver med volum  $\pi r^2 \cdot \Delta x$ , der  $r = f(x)$



$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi (f(x))^2 \Delta x \\ &= \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \end{aligned}$$

Eksempler

Kjægle  
 $f(x) = x \quad x \in [0, 2]$



Volum  $V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 x^2 dx$

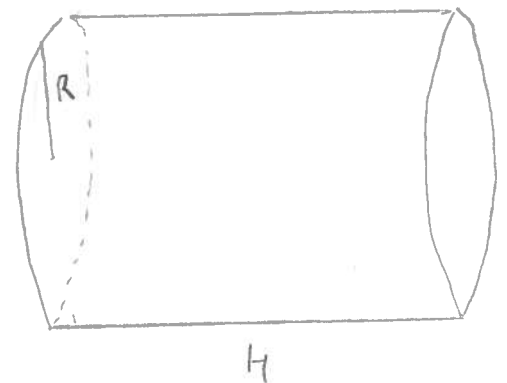
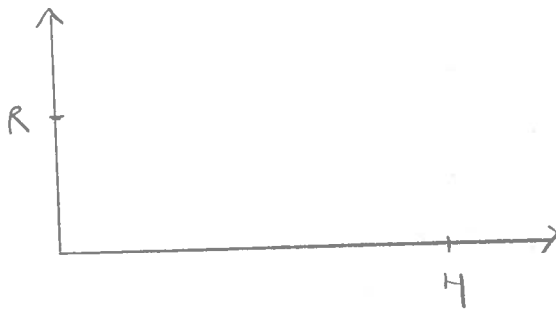
$$= \pi (G(2) - G(0)) = \pi \left( \frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{8}{3} \pi$$

der  $G(x) = \frac{1}{3}x^3$  er antiderivat  
 av  $f(x) = x^2$

Sylinder:

$$f(x) = R \quad x \in [0, H] \quad R > 0, H > 0$$

gir sylinder med radius  $R$  og høyde  $H$



Volum

$$V = \pi \int_0^H f(x)^2 dx$$

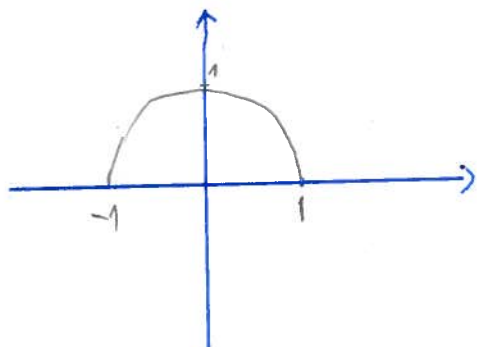
$$= \pi \int_0^H R^2 dx = \pi (R^2 H - R^2 \cdot 0)$$

$$= \pi R^2 H$$

I eksemplet på forrige side ( $R=2, H=5$ ) er  $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi$

Oppgaver:

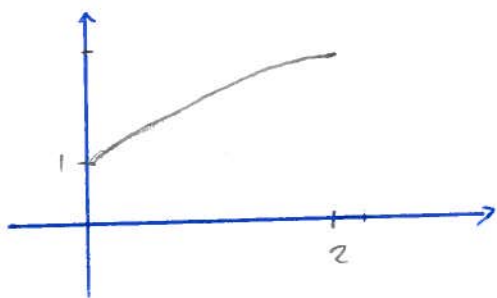
I)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$   $x \in [-1, 1]$



Hva blir omdreiningsslegemet?

Hva blir volumet?

II)  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$   $x \in [0, 2]$



Finne volum av omdreiningsslegemet?