System av lineære ligninger, radoperasjoner og trappeform

Lay (Enge) 1.1, 1.2

Husk: ligning for rett linje i planet

$$ax+by=c$$

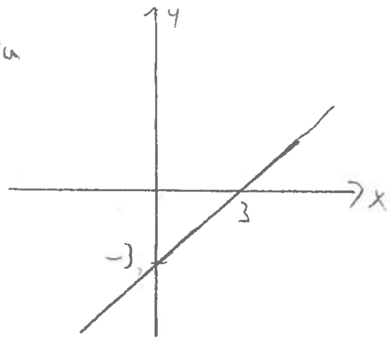
eks: $x-y=3$ $\quad (\Leftrightarrow y=x-3)$

Løsninger av en slik ligning er par (x_0,y_0) s.a. $ax_0+by_0=c$

eks $x_0-y_0=3$ altså alle punkt på linja

Altså uendelig mange løsninger, $(5,2)$, $(7,4)$, $(\pi, \pi-3)$ .....

Kan beskrive løsningene v.h.a. en parameter t $\quad (t+3, t)$ eller $(t, t-3)$



Husk: to lineære ligninger

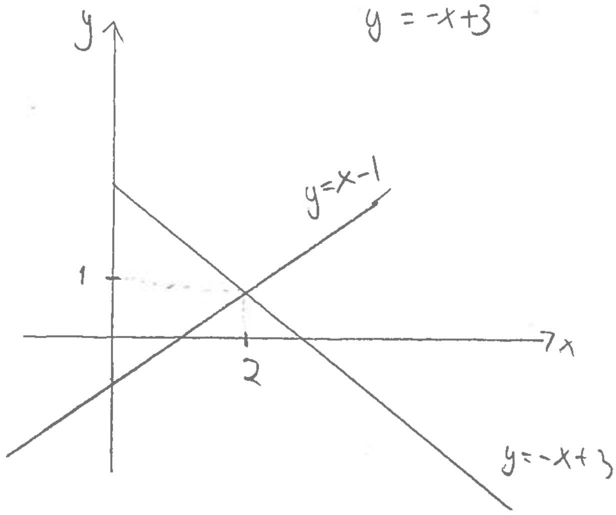
$$\begin{aligned} \text{I} \quad & ax+by=c \\ \text{II} \quad & a'x+b'y=c' \end{aligned}$$

Når vil det finnes (x_0,y_0) som er løsninger av både I og II?
Og: finnes det mange løsninger?

Eks: 1) $x - y = 1$
$x + y = 3$

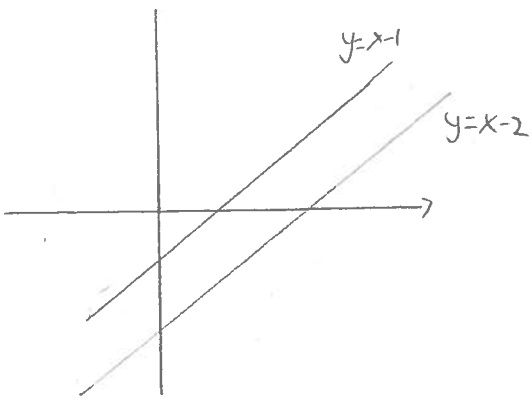
Det finnes bare én løsning
$x_0 = 2 \quad y_0 = 1$

Dette er skjæringspunktet til de rette linjene
$y = x - 1$
$y = -x + 3$



2) $x - y = 1$
$2x - 2y = 4 \qquad (\Leftrightarrow x - y = 2)$

Det finnes ingen løsninger. Vi har to parallelle linjer
$y = x - 1$
$y = x - 2$
som ikke skjærer hverandre



3) $x - y = 1$
$2x - 2y = 2$

Disse ligningene har samme løsningsmengde, de gir den samme rette linja i planet.
Systemet har dermed ∞ mange løsninger.
$(t, t-1)$ for alle t i $\mathbb{R}$
altså alle punkter på linja $y = x - 1$

Vi skal se på lineære ligningssett med m - ligninger
og n variable / ukjente

Vi vil vanligvis ha $n=2$ eller $n=3$ og kaller variablene x, y, z

Eksempler

(A) $m=3$, $n=3$

$$x+y=2$$
$$x+z=2$$
$$y+z=4$$

(B) $m=2$, $n=3$

$$x+z=5$$
$$y+z=2$$

Generelt:

$$ax+by+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$
$$a''x+b''y+c''z=d''$$
$$\vdots$$

Vi skal se at et slikt sett av lineære lign. har alltid

enten 1) Ingen løsning
eller 2) nøyaktig én løsning
eller 3) uendelig mange løsninger

OG: VI SKAL SE PÅ EN ALGORITME SOM BÅDE AVGJØR OM LØSNINGER FINNES OG EVT FINNER ALLE LØSNINGER

Eks. I $x - y = 1$ "utvidet matrise" $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$ legg til rad I

II $x + y = 3$ legg til lign I

$\Updownarrow$

$x - y = 1$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{2}$

$2y = 2$ del på 2 (dvs. gang med $\frac{1}{2}$)

$\Updownarrow$

$x - y = 1$ legg til lign II. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ legg til rad II

$y = 1$

$\Updownarrow$

$x = 2$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$y = 1$

n - kolonner

Notasjon: $m \times n$ - matrise

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{array}\right] \quad m \text{ rader}$$

a_{ij} kalles elementer

Gitt et ligningssystem har vi en koeffisient-matrise og en utvidet matrise

eks

$x + z = 5$
$y + z = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$x + y = -2$
$y + 3z = 5$
$x + 2y - z = 7$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

Vi vil løse lign.ingssett ved å gjøre operasjoner på

utvidet matrise

Tre typer operasjoner (kalles elementære rad-operasjoner) er lovlige

I Addere et multiplum av en rad til en annen rad

II Bytte om to rader

III Multiplisere en rad med en konstant ($\neq 0$)

Mål: v.h.a. disse operasjonene få skrevet om matrisa (og det tilsvarende lineære systemet) på en slik måte at vi finner evt. løsninger av systemet

Eks Ⓐ

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ x+z&=2 \\ y+z&=4 \end{aligned} \xrightarrow{\text{utvidet matrise}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

legg til $-1 \cdot$ (rad I)

$\downarrow$

tilsvarende system

$$\left(\begin{aligned} x+y&=2 \\ -y+z&=0 \\ y+z&=4 \end{aligned}\right) \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

legg til $1 \cdot$ (rad II)

$\downarrow$

tilsvarende system

$$\left(\begin{aligned} x+y&=2 \\ -y+z&=0 \\ 2z&=4 \end{aligned}\right) \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

gang med $\frac{1}{2}$

tilsvarende system

$x+y=2$

$-y+z=0$

$z=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \text{ gang med } -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{legg til 1· rad III} \\ \\ \end{array}$$

NB! Nå er det lett å finne løsningen, ved å "slurke nedenfra"

$z=2$

$y=z=2$

$x=2-y=0$

Men, vi kan også gjøre dette v.h.a. radoperasjoner

$$\downarrow$$

$x+y=2$

$y=2$

$z=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{legg til (-1)·rad II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\downarrow$$

$x=0$

$y=2$

$z=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Eks (B) $\begin{aligned} x+z&=5 \\ y+z&=2 \end{aligned}$

utvidet matrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Matrisene $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ og $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

sies å være på trappeform.

Def: Ledende element: Det første elementet $\neq 0$ i en rad

eks. $[0\ 0\ 1\ 2]$

1 ← ledende element

Trappeform: evt. 0-rader er nederst (0-rad: $[0\,0 \ldots 0]$)

og ethvert ledende element er i en kolonne til høyre for den ledende element i raden over.

eks

$$\begin{bmatrix} 0 & a & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$*$ - kan være ikke-null eller null

$a, b, c \neq 0$

Redusert trappeform: Trappeform +

alle ledende elementer er 1 (ledende 1)

hver ledende 1 er i en kolonne som ellers består av 0'ere.

Eks Matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ fra eks (A)

matrisa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ fra eks (B)

og $\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ der $*$ er hva som helst er alle på redusert trappeform

Fakta: Alle matriser kan v.h.a. elementære radoperasjoner bringes på trappeform og redusert trappeform.
Redusert trappeform for en gitt matrise er unik.

Eks. Gitt: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Mange av matrisene på side 5-6 er på trappeform, men bare

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ er på redusert trappeform.

Algoritme for å finne redusert trappeform for ei matrise.

Def. Pivot-posisjon. Posisjon i A tilsvarende ledende 1 i red. trappeform av A

Pivot-kolonne: Kolonne i A med ledende 1 i red. trappeform til A

pivot-element i en pivot-posisjon

Eks

pivot posisjon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pivot posisjon

Kol. 1 og kol. 2 er pivot-kolonner

Eks.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

har trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Så pivot posisjonene er

$$\begin{bmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{bmatrix}$$

og kol 1, 2 og 3, er pivot-kolonner

Algoritmen

1. Velg kolonnen lengst til venstre som ikke er $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Dette er en pivot-kolonne, og øverst er en pivot-posisjon

2. a) Velg en pivot ($\neq 0$). Om nødvendig må to rader bytte plass, s.a. pivot'en havner i pivot-posisjon

b) Om nødvendig skaler raden med pivot'en s.a. ledende element blir 1.

3. Bruk radoperasjoner av type 1, for å få 0'ere under pivot'en

4. Se bort fra øverste rad, og gjenta 1-3 med resten av matrisa

Repeter denne prosessen til vi har trappeform (med ledende enere)

For å få matrisa på redusert trappeform, må vi i tillegg gjøre:

5. Start med pivot'en lengst til høyre, Bruk radoperasjoner av type 1, for å få 0'ere over denne pivoten
Gjenta med neste pivot (fra høyre), til vi har redusert trappeform

Eks:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Den første kolonnen er ikke $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så vi velger pivot-posisjon $\begin{bmatrix} * & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

2a) Vi bytter rad II og I for å få $\neq 0$ element i pivot-posisjon

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2b) Vi skalerer rad I (mult. med $\frac{1}{3}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Vi legger til $-2 \cdot$ rad I til rad III, for å få 0 under pivot'en

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

pivot posisjon

4) Vi glemmer nå rad I. Har da mat $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

2b) Skaler (mult. med $\frac{1}{2}$) rad II

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

3). legg $1 \cdot$ rad II til rad III

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

4) - glemmer rad I og II. Skalerer rad 3 (mult. med $\frac{3}{10}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Har nå trappeform, og kan få redusert trappeform ved steg 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad -2 \cdot \text{rad III} \quad \frac{2}{3} \cdot \text{rad III}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad -1 \cdot \text{rad II}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

redusert trappeform.

Eks.

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 6 \end{aligned} \xrightarrow{\text{Utvidet matrise}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ Legg til } -2 \cdot \text{rad I}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Merk: sisk rad gir

$$0x + 0y = 1$$

Har ingen løsning.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ legg til } -1 \cdot \text{rad I} \quad \text{legg til } -2 \cdot \text{rad I}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ legg til } 2 \cdot \text{rad II}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0x + 0y + 0z = 1$$

ingen løsning

Eks: $x+y+z=2$
$y+2z=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ legg til -1·rad II

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ Dette er redusert trappeform

Vi har en kolonne <u>uten</u> ledende enhet / ledende en, dette er den tredje kolonna, som tilhører variabelen z. Vi har ligningssettet

$$x - z = 1$$
$$y + 2z = 1$$

Med $z=t$, får vi

$$x = t+1$$
$$y = -2t+1$$
$$z = t$$

Hver verdi av $t \in \mathbb{R}$, gir en løsning

Eks: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right]$$

kan reduseres til

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, redusert trappeform

$$x - 6z = 6$$
$$y + 5z = -1$$

fri variabel $z=t$

$$x = 6t+6$$
$$y = -1-5z$$
$$z = t$$

Oppsummering: Gitt et ligningssystem med m ligninger og n variable

Da er den utvidete matrisa A' en $m \times (n+1)$-matrise

La $\tilde{A}$ være redusert trappeform av A.

1) Hvis $\tilde{A}$ har ledende element i siste kolonne (dvs en rad $[0\,0 \ldots 0\,1]$) har systemet ingen løsning

2) Hvis $\tilde{A}$ har ledende ettere i alle kolonner unntatt den siste,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & * \\ & 1 & & & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & * \end{array}\right]$$

har vi nøyaktig en løsning

eks

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$x = 3$

$y = -1$

$z = 2$

3) Har en av de n første kolonnene ikke en ledende 1 (og 1) gjelder ikke), har vi en fri variabel tilsvarende denne kolonnen. Vi får dermed ∞ mange løsninger