Vektorer og vektorligninger

Lay: 1.3

Vektorer

$m \times 1$-matriser $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ kalles også vektorer i $\mathbb{R}^m$

Eks: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er vektorer i $\mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er vektorer i $\mathbb{R}^3$

Vi kan addere vektorer, og gange de med en skalar (et element i $\mathbb{R}$)

Eks

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

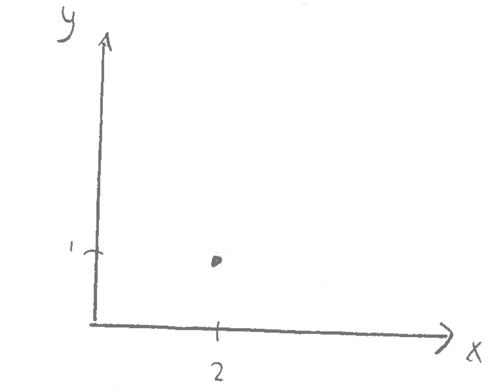
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vektorer i planet ($\mathbb{R}^2$)

Vi identifiserer vektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ med punktet (a,b) i planet

Notasjon

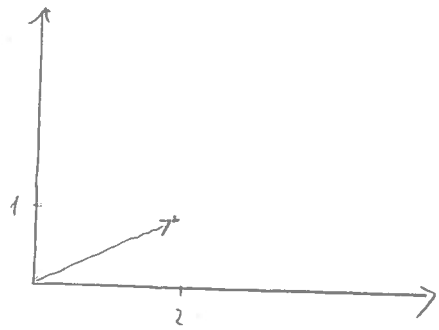
Vi bruker notasjonen $\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ f.eks



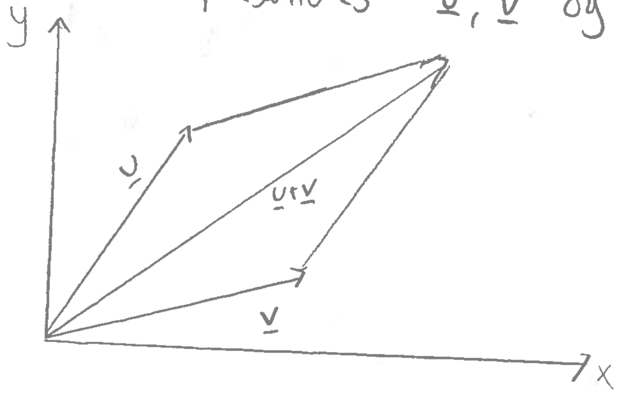
$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ eller $(2,1)$

vektor-notasjon punkt-notasjonen

Vi representerer noen ganger punktet (a,b) med en pil fra origo til (a,b)



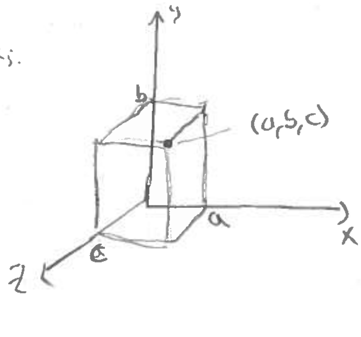
Vi får da også en fin måte å tolke vektor-addisjon på; her representeres $\underline{u}$, $\underline{v}$ og $\underline{u}+\underline{v}$ v.h.a. piler i planet



Vektorer i rommet ($\mathbb{R}^3$)

Vi kan identifisere $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ med punktet (a,b,c)

f.eks:



Linear Kombinasjoner

La $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$ (her $n = 2, 3$)

og $c_1, c_2, \dots, c_p$ tall i $\mathbb{R}$

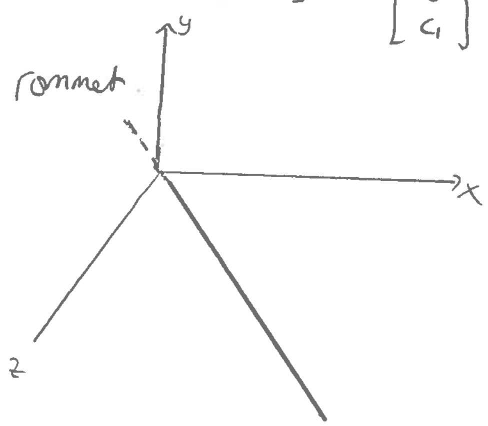
Da er $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_p \underline{v}_p$ en ny vektor i $\mathbb{R}^n$, den sies å være en linear kombinasjon av $\underline{v}_i$-ene.

Eks.

i $\mathbb{R}^2$, la $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da er alle $c_1 \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ alle punkter på linja $y = x$

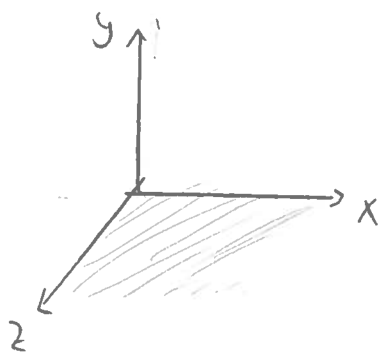
i $\mathbb{R}^3$, la $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Da er alle $c_1 \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$ alle punkter på linja $\begin{matrix} x = z \\ y = 0 \end{matrix}$ i rommet



La $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Da er alle linear kombinasjoner

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$$ alle punkter

i xz-planet



Vektor-lygninger

Gitt vektorer $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p$ og en vektor $\underline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$

Kan vi spørre, finnes det $x_1, \dots, x_p$ s.a.

$$(*) \qquad x_1 \underline{u}_1 + x_2 \underline{u}_2 + \dots + x_p \underline{u}_p = \underline{v}$$

altså: er $\underline{v}$ en lineær-kombinasjon av $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p$?

(*) kalles en vektor-lygning

Den kan oversettes til et sett av lineære lygninger

Eks: Gitt $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Er $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

for verdier av x_1 og x_2 ?

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Altså: et system med utvidet matrise $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Oppgave: løs systemet

Generelt: En vektorligningen $x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$

har samme løsningsmengde som det lineære systemet med utvidet matrise

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \vdots & \underline{a}_2 & \vdots \dots & \vdots & \underline{a}_n & \underline{b} \end{bmatrix}$$

Kolonne 1 Kolonne 2 Kolonne n Kolonne n+1

Oppgave: Løs vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Definisjon: gitt vektorer $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ i $\mathbb{R}^n$

alle vektorer som kan skrives $c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + \dots + c_p \underline{a}_p$

sies å være generert av $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$. Vi lar

span$\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ være mengden av alle vektorer generert av $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$

Eks $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ er generert av $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$

siden $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\underline{a}_1 + \underline{a}_2$

Eks: La $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Da er $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ikke generert av $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$

siden $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ikke har noen løsninger.

Matriselignngen $A\underline{x} = \underline{b}$

Lay 1.4

La $A = [\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \dots \ \underline{a}_n]$ være en $m \times n$ matrix

der $\underline{a}_i$ er $m \times 1$-matriser
(= vektorer i $\mathbb{R}^m$)

Eks. $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = [\underline{a}_1 \ \underline{a}_2]$ er en 3×2-matrix

Definisjon: La $A = [\underline{a}_1 \; \underline{a}_2 \; \dots \; \underline{a}_n]$ være $m \times n$-matrise

og $\underline{x}$ en $n \times 1$ matrise (dvs en vektor i $\mathbb{R}^n$)

Da er

$$A\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_n\underline{a}_n$$

NB! Vi definerer her hvordan vi skal gange sammen en $m \times n$-matrise og en $n \times 1$-matrise. Produktet blir en $m \times 1$ matrise

Eks.
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 21 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 6y + 5z \end{bmatrix}$$

Et lignings-system

f.eks
$$2x + y = 3$$
$$x - y = 7$$

Kan dermed skrives som en matrise-ligning

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

siden
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \end{bmatrix}$$

Teorem: Hvis A er en $m \times n$-matrise $\underline{b}$ er en vektor i $\mathbb{R}^m$ og

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, så har

i) matrise ligningen $A\underline{x} = \underline{b}$

ii) vektor ligningen $x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$ der $A = [\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n]$

iii) lignings-systemet med utvidet matrise

$$[\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n \ \underline{b}]$$

samme løsningsmengde

<u>Oppg.</u> Skriv om ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y + 3z &= 3 \\ y + 7z &= -1 \end{aligned}$$

som vektorligning, og som matriseligning.

EGENSKAPER VED MATRISE-VEKTOR-PRODUKTET $A\underline{x}$

A $m \times n$-matrise

$\underline{u}, \underline{v}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ ($= n \times 1$-matriser)

$c \in \mathbb{R}$

Da er
$$A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$$
$$A(c\underline{u}) = c(A\underline{u})$$