MA 0003
9/11

$\boxed{\text{Lineær transformasjoner}}$

Lay 1.8.

Vi har sett på funksjoner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f.eks. $f(x) = 3x$ eller $f(x) = 3x + 2$

Vi vil nå se på funksjoner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Eks: $m = n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x + y \\ 2y \end{bmatrix}$$

eller (med vektor-notasjon)

$$f(\underline{x}) = A\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\underline{x}$$

Eks:

2×3-matrise, gir funksjon $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x + y + 3z \\ 2y + z \end{bmatrix}$$

eks: $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Husk: $A(\underline{u}+\underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$

$A(c\underline{u}) = c(A\underline{u})$

når $A$ er $m\times n$-matrise

$\underline{u}, \underline{v}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

$(= (n\times 1)$-matriser$)$

$c \in \mathbb{R}$

Funksjoner $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Kalles ofte transformasjoner, vi bruker ofte $T$ (istedetfor $f$), altså $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Transformasjoner som oppfyller $T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

og $T(c\underline{u}) = cT(\underline{u})$

Kalles <u>lineær transformasjoner</u>

Eks: Funksjonen (transformasjonen) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x\cdot y \\ 0 \end{bmatrix}$ er <u>ikke</u> en lineær transformasjon

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Eks:</u> $A$ $m\times n$-matrise,

$T(\underline{u}) = A\underline{u}$ er en lineær transformasjon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

## Fakta

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær transformasjon

Da er

$$T(\underline{0}) = \underline{0} \qquad \left( \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

nullvektoren

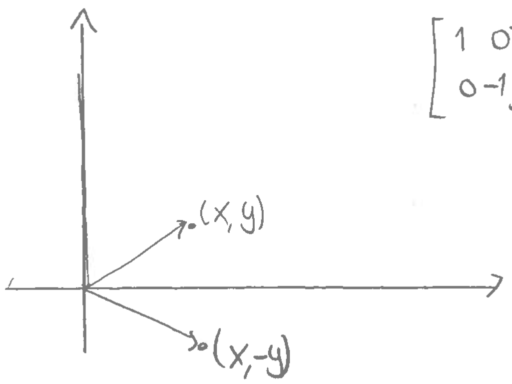
$T(c\underline{u} + d\underline{v}) =$

$cT(\underline{u}) + dT(\underline{v})$ for alle $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ $c, d \in \mathbb{R}$

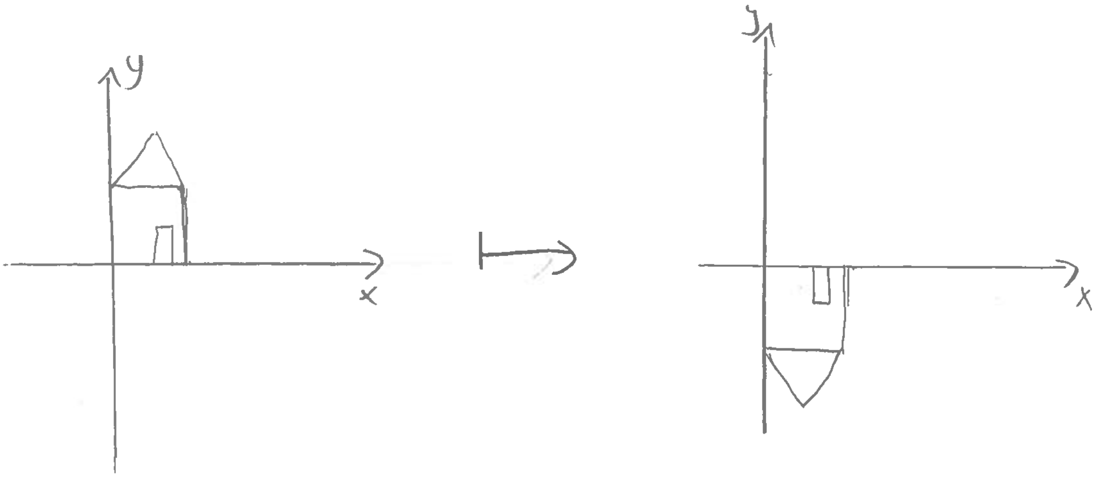
## Eksempler:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad T(\underline{x}) = A\underline{x}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



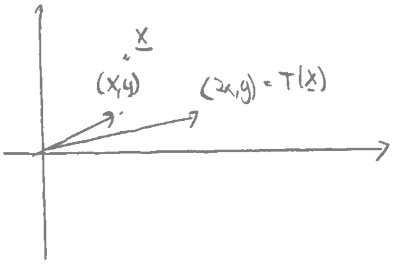

Husk vi identifiserer punktet $(x,y)$ med vektoren $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

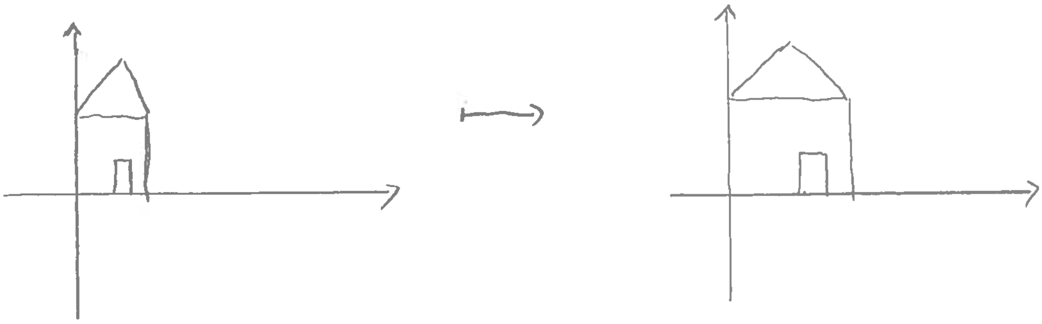


Eks.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

$T(\underline{x}) = A\underline{x}$ er en lin. trans. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

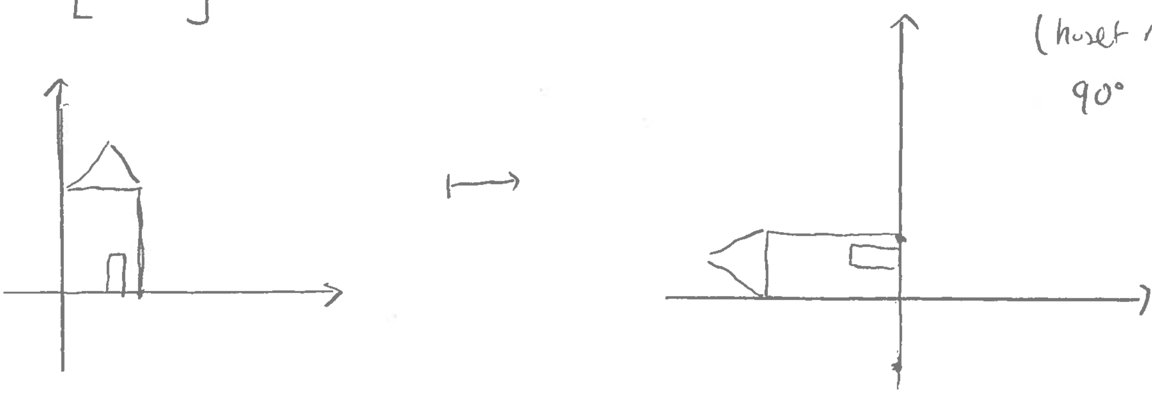


(samme høyde, dobbel bredde)

Eks.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

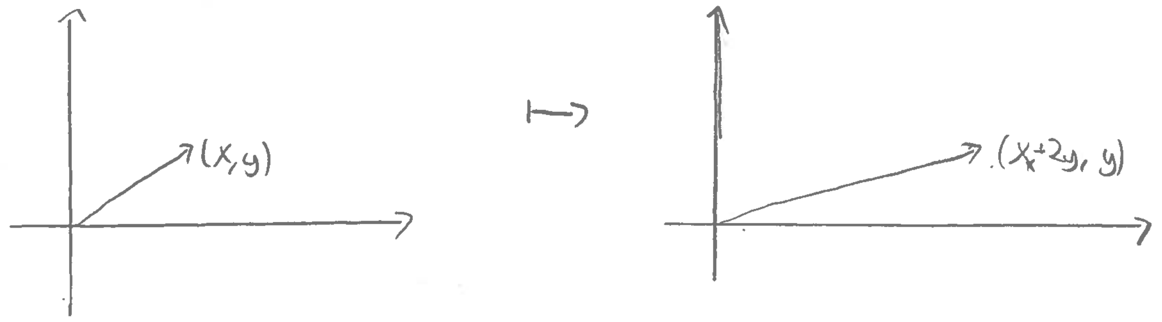


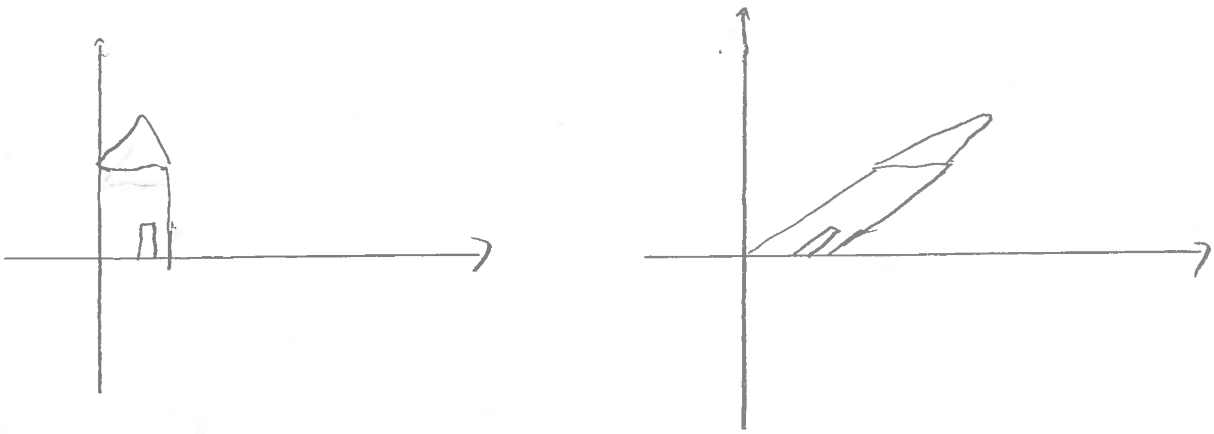
(huset roterer 90°)

Eks: $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$T(\underline{u}) = A\underline{u}$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+2y\\ y\end{bmatrix}$$

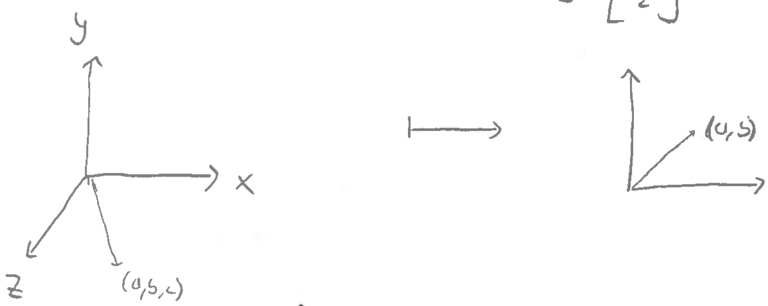


Eks $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

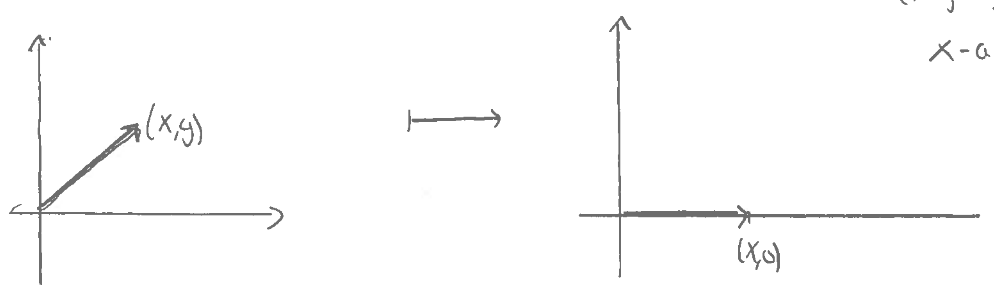
$T(\underline{u}) = A\underline{u}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$



Eks 5 $\quad A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$

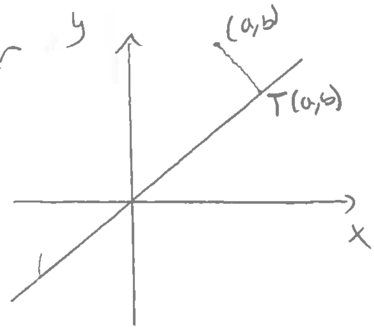
(Projeksjon på x-aksen)




Så langt: vi har sett mange eksempler på lin. trans. gitt ved

$T(\underline{u}) = A\underline{u}$, for en matrise u. Noen ganger vil vi starte med en funksjon, som vi kan beskrive geometrisk, og som er en lineær transformasjon. Vi skal se, at det da er mulig å finne en matrise A, som beskriver funksjonen.

Eksempler



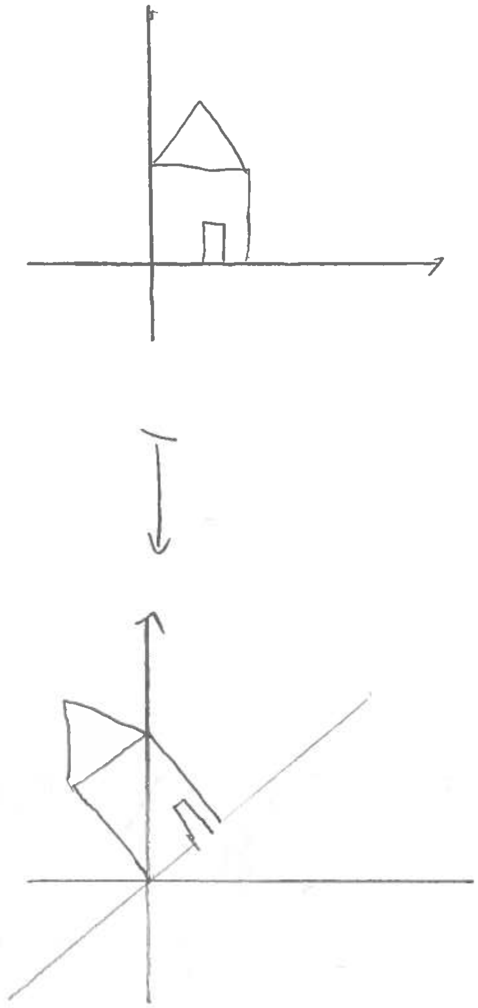

Vi ønsker å beskrive en projeksjon på linja $y=x$. Altså en avbildning (transformasjon) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som sender et punkt $(x,y)$ på det nærmeste punktet på linja $y=x$.

En slik transformasjon/funksjon vil være en lineær-trans., siden

$$T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$$

$$T(c\underline{u}) = cT(\underline{u})$$

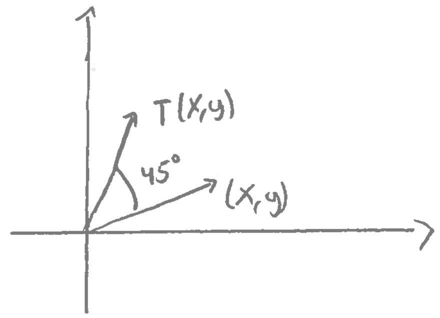
Eks




Vi ønsker å beskrive en rotasjon på 45°.

Altså en avbildning $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(funksjon/transformasjon)

som roterer hver vektor (hvert punkt) 45°




Da er $T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

og $T(c\underline{u}) = cT(\underline{u})$

Så dette er en lineær trans.

Vi skal se at i begge eksemplene er det mulig å finne en matrise $A$, s.a.

$$T(\underline{u}) = A\underline{u}$$