$\boxed{\text{Matrise - operasjoner}}$

Lay 2.1

Eks: La T, U være lin. transformasjoner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

gitt ved matrisa $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, og

$$U(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

gitt ved matrisa $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sammensetningen av lin. trans. T og U er en ny lin. trans

$V = U \circ T$, definert ved $V(\underline{x}) = U(T(\underline{x}))$

så $V(\underline{x}) = U(T(\underline{x})) = U(B\underline{x}) = A(B\underline{x})$

spesielt $V\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og $V\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

Altså er $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ standard matrisen til $V = U \circ T$

Mer generelt:

La $T(\underline{x}) = B\underline{x}$ der A, B er 2×2-matriser
$U(\underline{x}) = A\underline{x}$ Altså $T, U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er to lineær transformasjoner

$(U\circ T)(\underline{x}) = U(T(\underline{x}))$

$= U(B\underline{x}) = A(B\underline{x})$

La $B = [\underline{b}_1 \ \underline{b}_2]$ der $\underline{b}_1$ og $\underline{b}_2$ er kolonnene i B, altså vektorer i $\mathbb{R}^2$, og $\underline{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$A(B\underline{x}) = A\left([\underline{b}_1 \ \underline{b}_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$

$= A(x_1\underline{b}_1 + x_2\underline{b}_2)$

$$= A(x_1 \underline{b}_1) + A(x_2 \underline{b}_2)$$

$$= x_1 (A\underline{b}_1) + x_2 (A\underline{b}_2)$$

$$= \begin{bmatrix} A\underline{b}_1 & A\underline{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

altså standard matrisa til $U \cdot T$ er $[A\underline{b}_1 \,\vdots\, A\underline{b}_2]$

der $A\underline{b}_1$ og $A\underline{b}_2$ er kolonnene.

Definisjon

A, B 2×2-matriser $\qquad A \cdot B = [A\underline{b}_1 \,\vdots\, A\underline{b}_2]$

når $B = [\underline{b}_1 \,\vdots\, \underline{b}_2]$

Generelt: A $m \times n$-matrise

B $n \times p$-matrise $\qquad B = [\underline{b}_1 \,\vdots\, \cdots \, \underline{b}_p]$

$$AB = [A\underline{b}_1 \,\vdots\, A\underline{b}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A\underline{b}_p]$$

Eks

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{array}{cc} \underline{b}_1 & b_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \ ?$$

Kolonnene er
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (A\,\underline{b}_1)$$

og
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (A\,\underline{b}_2)$$

Så produktet er
$$\begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = A \cdot B$$

I praksis: Vi deler A i rader og B i kolonner

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\text{rad } 1] \\ [\text{rad } 2] \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \text{k} & \text{k} \\ \text{o} & \text{o} \\ \text{l} & \text{l} \\ 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a = [\text{rad } 1] \begin{bmatrix} \text{k} \\ \text{o} \\ \text{l} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b = [\text{rad } 1] \begin{bmatrix} \text{k} \\ \text{o} \\ \text{l} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c = [\text{rad } 2] \begin{bmatrix} \text{k} \\ \text{o} \\ \text{l} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad d = [\text{rad } 2] \begin{bmatrix} \text{k} \\ \text{o} \\ \text{l} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a = [2\ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 11 \qquad b = [2\ 3] \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = 14$$

$$c = [1\ -1] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \qquad d = [1\ -1] \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = 7$$

Eks.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

siden $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

og $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

altså $A \cdot B \neq B \cdot A$.

<u>Eks.</u>

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 21 & 25 \end{bmatrix}$$

siden $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1(-1) = 18$

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$

$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 21$

og $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 25$

Oppg: regn ut $B \cdot A$ NB! det blir en 3×3-matrise.

<u>Addisjon av matriser</u>

Gitt to 2×2-matriser, eks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$,

har vi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

<u>eks</u> $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

generelt: gitt to $m\times n$-matriser A, B, kan vi definere summen $A+B$ på samme måte som for 2×2-matriser

Eks:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon med skalar

Vi kan også definere $k \cdot A$ der $k \in \mathbb{R}$ og A er en $m\times n$-matrise

f.eks. hvis A er 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ og $k \in \mathbb{R}$

har vi $kA = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$,

samme regel for vilkårlig $m\times n$-matrise

Eks.
$$3 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 21 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Regneregler

$A(BC) = (AB)C$

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

$r(AB) = (rA)B = A(rB)$

der A, B, C er matriser og r en skalar ($r \in \mathbb{R}$)

Identitets-matrisa

La $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

da er $I \cdot A = A$ for alle $2 \times p$ - matriser A

og $A I = A$ for alle $p \times 2$ - matriser A

eks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Tilsvarende for $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ osv....

Eks La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ekspansjon i x-retn

$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Kontraksjon i x-retn

Da er $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

og $B \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Def

La A være en $n \times n$-matrise,
hvis det finnes en $n \times n$-matrise B s.a

$$AB = I_n$$
og
$$BA = I_n$$

(der $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$)

så sies B å være invers matrise til A. A sies å være inverterbar.

Kan vise: det finnes bare en slik B (for en gitt A).
Denne kalles A^{-1}

Eks.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ siden

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og
$$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eks

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

siden
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem

Hvis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er en 2×2-matrise

så finnes en A^{-1} hvis og bare hvis $ad-bc \neq 0$.

Når $ad-bc \neq 0$ er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Eks

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Det finnes ingen A^{-1}

Eks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Siden $2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$, finnes ingen A^{-1}

Eks. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Eks. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{14-(-1)(-1)} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$

Oppg. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Finn A^{-1}