MA 0003

21/11

Forts. fra 2.2.

NB! For $n \geq 2$ finnes algoritmer for å avgjøre om A er invertebar, og for å finne A^{-1}!
(men vi skal ikke gjøre det i dette kurset)

Husk matrise-ligninga $A\underline{x} = \underline{b}$

eks. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hvis A er invertebar, kan vi løse ligninga ved å multiplisere med A^{-1}

$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}$$
$$\Downarrow$$
$$(A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \qquad \text{siden } (A^{-1}A) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

Eks: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

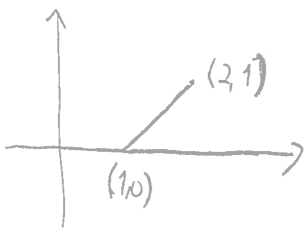
$\boxed{\text{Noen anvendelser i data-grafikk}}$

Lay 2.7

Faktum: hvis $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lineær transformasjon så vil T avbilde et linjestykke i $\mathbb{R}^2$ på et linjestykke i $\mathbb{R}^2$ eller et punkt i $\mathbb{R}^2$.

Eks: $T(x) = A\underline{x}$, der $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Betrakt linjestykket fra punktet $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ til punktet $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



Punktene er

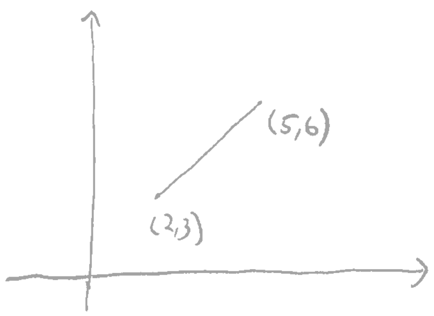
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 0 < t \le 1$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3t \\ 3+3t \end{bmatrix}$$

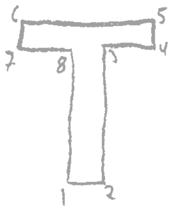
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \qquad 0 \le t \le 1$$

Dette er linjestykket som går fra $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$



Dermed kan en figur som består av linjesegmenter, beskrives v.h.a. endepunktene til linjesegmentene

Eks.



Kan beskrive v.h.a. 8 punkter,

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1{,}5\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1{,}5\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2{,}5\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2{,}5\\3{,}5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\3{,}5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

Disse "lagres" som kolonner i ei 2×8-matrise

$$\begin{bmatrix}1 & 1{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 & 2{,}5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3{,}5 & 3{,}5 & 3 & 3\end{bmatrix} = M$$

En lineærtransformasjon T virker på hvert punkt, dvs. hver kolonne i matrisa

Eks. $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ gitt ved $A = \begin{bmatrix}1 & 0{,}2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ gir

$$AM = \begin{bmatrix}1 & 0{,}2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 & 2{,}5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3{,}5 & 3{,}5 & 3 & 3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1{,}5 & 2{,}1 & 3{,}1 & 3{,}2 & 0{,}7 & 0{,}6 & 1{,}6\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3{,}5 & 3{,}5 & 3 & 3\end{bmatrix}$$ som gir figuren

Å flytte punkter/figurer (translasjon)

Transformasjonen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$$

flytter alle punkter en enhet opp og en til venstre.

Men, $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+c+1 \\ b+d+1 \end{bmatrix}$

$$\neq$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+1 \\ b+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+1 \\ d+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c+2 \\ b+d+2 \end{bmatrix}$$

altså er T ikke en lineær transformasjon

(Husk $T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$ for lin. trans. T)

Homogene koordinater

Vi ønsker å representere en translasjon som en lineær-transformasjon. Dette kan vi gjøre ved å bruke homogene koordinater:

Punktet $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ representeres ved punktet $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$

Translasjon $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}$ gir translasjonen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \end{bmatrix}$$

Denne kan representeres v.h.a. matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siden $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}$

Eks. transformasjonen T gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ flytter alle punkter

en enhet opp, og en til høyre

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sammensetninger

Vi ønsker å kombinere translasjon med andre transformasjoner

i $\mathbb{R}^2$, f.eks. rotasjon, refleksjon, ekspansjon/kontraksjon, forskyvning.

For å kunne gjøre dette må vi representere disse transformasjonene

som transformasjoner $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vha. homogene koordinater

Transformasjonen gitt ved $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\left(T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$

kan rep. ved $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A'$, f.eks. rotasjon $90°$

som er gitt ved $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, kan rep. ved

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Husk: sammensetning $U \circ T$ av lin transformasjoner T, U med standardmatriser B og A, representeres ved standardmatrisen AB.

Eks: Rotasjon $90°$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sammensatt med

translasjonen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

gir standard-matrise $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dvs. transformasjon gitt ved $V\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

roterer først en figur $90°$, forskyver den så én enhet opp og én til høyre