Oversikt / repetisjon - lineær algebra

(Lay 1.1 - 2.7)

Lineære ligningssystem kan løses v.h.a. å gjøre radoperasjoner på utvidet matrise

Eks. I

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 4y = 10$$

Utvidet matrise $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

Gjør radoperasjoner for å få denne på redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \quad (-3) \cdot \text{rad I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & \frac{17}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{2}{17}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \text{rad II}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ det finnes bare en løsning : $x = 2$, $y = -1$

Eks II

$$2x + 3y + z = 5$$
$$3x + 2z = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} (-3) \cdot \text{rad I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix} \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \text{rad II}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Dette er redusert trappeform

$$x + \frac{2}{3} z = 1$$
$$y - \frac{1}{9} z = 1$$

På parameterform

$$x = 1 - \frac{2}{3} t$$
$$y = 1 + \frac{1}{9} t$$
$$z = t$$

Ligningssystemene (fra eks I og II) på vektorform

$$x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

og på matrise form

$$\begin{bmatrix}2&3\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}2&3&1\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

En $n\times n$-matrise A kalles invertebar, dersom det finnes $n\times n$-matrise B

s.a. $AB = I = BA$ der $I=\begin{bmatrix}1&0&&0\\0&1&&0\\&&\ddots&\\0&\cdots&&1\end{bmatrix}$ - identitetsmatrisa

B sies å være en invers, vi lar $B=A^{-1}$

A 2×2-matrise $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. Hvis $ad-bc\neq 0$ er $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

Eks. $\begin{bmatrix}2&3\\3&-4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17}&\frac{3}{17}\\\frac{3}{17}&-\frac{2}{17}\end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}4&3\\3&-2\end{bmatrix}$

Kan bruke inversen til å løse ligningssystemer på matrise form

eks

$$\begin{bmatrix}2&3\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}4&3\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\left(A\underline{x}=\underline{b} \quad\Rightarrow\quad \underline{x}=A^{-1}\underline{b}\right)$$

Lineær transformasjoner

$n \times 1$ matriser $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ kalles vektorer i R^n

for $n=2$ eller $n=3$ identifiserer vi vektorer med

punkter i planet (R^2) eller rommet (R^3)

En funksjon $T: R^n \to R^m$ kalles en lineær transformasjon

dersom $T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

og $T(c\underline{u}) = cT(\underline{u})$ for alle vektorer $\underline{u}, \underline{v}$ i R^n, $c \in R$.

Hvis A er en $m \times n$-matrise er $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ en lineær transformasjon

Typiske eksempler:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - refleksjon om y-aksen

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ - refleksjon om linja $y = x$

$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $k > 1$: ekspansjon i x-retning

$0 < k < 1$: kontraksjon i —"—

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ forskyvning (shear) i x-retning

θ vinkel $\theta \in [0, 360^\circ)$

eller $\theta \in [0, 2\pi)$

Rotasjon θ grader er gitt ved $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

eks $\theta = 90^\circ$ $\left(= \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Translasjon

Funksjonen $U\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \end{bmatrix}$ er ikke en lineær transformasjon

Men: funksjonen $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ er en lin. trans

$T: R^3 \to R^3$ og $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}$

Så hvis vi lar punktet $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ i R^3 representere $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ i R^2,

har vi beskrevet translasjon v.h.a. en lineær transformasjon.

Matrisa til en linear transformasjon

Gitt en lin. trans $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, så finnes en matrise A (en $m \times n$-matrise)

slik at $T(\underline{x}) = A\underline{x}$

Vi har at $A = \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right) \;\vdots\; T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right) \cdots\cdots \;\vdots\; T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right) \right]$

Eks. Hvis $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en lin. trans s.a. $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}$,

så er $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ der $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 7\end{bmatrix}$

Sammensetning av linear transformasjoner $\leftrightarrow$ multiplikasjon av matriser

$T: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ $\qquad T(\underline{x}) = B\underline{x}$ $\qquad B$ $n \times p$-matrise

$U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad U(\underline{x}) = A\underline{x}$ $\qquad A$ $m \times n$-matrise

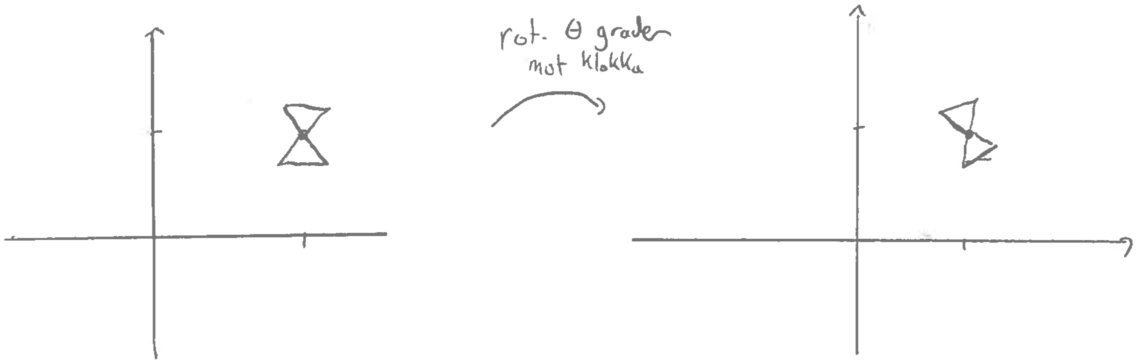
Den sammensatte lin. trans. $V = T \circ U$ er da gitt ved

$V(\underline{x}) = (AB)\underline{x}$ der AB er matrise produktet

eks. $A \cdot B = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 7\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 8\\2 & 16\\3 & 25\end{bmatrix}$

Eks

Figuren ⧖ med senter : (3,3) skal roteres θ grader mot klokka (om senteret)



Strategi : I. flytt figuren slik at senteret blir i origo

II. roter θ grader

III flytt figuren tilbake, s.a. senteret er i (3,3)

I gjøres v.h.a
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II gjøres v.h.a.
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

der $a = \cos\theta$
$b = \sin\theta$

III gjøres v.h.a.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sammensetningen, først I, så II, så III gjøres da v.h.a. matrisa gitt ved produktet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & -3a+3b+3 \\ b & a & -3a-3b+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

der $a = \cos\theta$

$b = \sin\theta$