Oppsummering MA0003

Øystein Skartsæterhagen

29.11.2011

Dette er en oppsummering av pensum i MA0003, med unntak av lineæralgebradelen.

1 Funksjoner

En funksjon har en *definisjonsmengde*, en *verdimengde* og en regel som tilordner et element av verdimengden til hvert element i definisjonsmengden. Hvis A og B er mengder, skriver vi

$$f\colon A \to B$$

for å si at f er en funksjon som har A som definisjonsmengde og B som verdimengde.

I dette faget (unntatt i lineæralgebradelen) er definisjonsmengden og verdimengden til en funksjon vanligvis enten mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall eller en delmengde av denne.

Når vi ikke sier noe om definisjonsmengden til en funksjon, antar vi at definisjonsmengden er den største mulige delmengden av $\mathbb{R}$. For eksempel vil vi for funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x-5}$$

anta at definisjonsmengden er $\mathbb{R} - \{5\}$ (mengden av alle reelle tall unntatt 5).

1.1 Polynomer

En funksjon f er et *polynom* hvis den kan skrives som

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

der n er et ikkenegativt heltall, og

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$$

er reelle tall. Tallet n kalles *graden* til polynomet, og c-ene kalles *koeffisienter*. Et polynom av grad 1 kalles en *lineær funksjon*.

Hvis vi multipliserer sammen to polynomer, får vi et nytt polynom. Vi sier at polynomet q er en *faktor* i polynomet p hvis vi kan skrive p som produktet av q og et annet polynom r:

$$p(x) = q(x) \cdot r(x).$$

Vi har følgende resultat: La p være et polynom, og a et tall. Da er polynomet $q(x) = x - a$ en faktor i p hvis og bare hvis $p(a) = 0$.

Dette kan vi for eksempel bruke til å faktorisere andregradspolynomer. La

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

være et andregradspolynom. Vi kan finne nullpunktene til p ved å løse likningen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Nå får vi tre muligheter:

1. Likningen har to løsninger x_1 og x_2: Da kan p faktoriseres som
$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$
2. Likningen har én løsning x_1: Da kan p faktoriseres som
$$p(x) = (x - x_1)^2.$$
3. Likningen har ingen løsninger: Da kan ikke p faktoriseres som et produkt av to lineære polynomer.

1.2 Rasjonale funksjoner

En *rasjonal funksjon* er en funksjon som er en kvotient av to polynomer. En funksjon f er altså rasjonal hvis den kan skrives som

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

der p og q er polynomer.

Vi sier at uttrykket

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

for en rasjonal funksjon er skrevet på *redusert form* hvis polynomene p og q ikke har noen felles faktorer.

1.3 Absoluttverdifunksjonen

Absoluttverdifunksjonen $|x|$ er definert ved

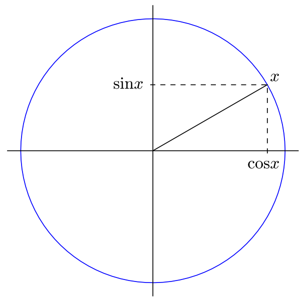
$$|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0, \\ -x & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Vi kan altså tenke på $|x|$ som «x uten fortegn».

1.4 Trigonometriske funksjoner

De trigonometriske funksjonene sinus og cosinus defineres ved hjelp av enhetssirkelen (sirkelen med radius 1 og sentrum i origo). Vi tolker funksjonsargumentet som en vinkel i radianer (i radianer er 2π en hel omdreining, altså det samme som 360 grader). Nullpunktet for vinklene er rett ut til høyre, og positiv retning er mot klokken.

Gitt et tall x definerer vi $\sin x$ og $\cos x$ slik: Vi tegner enhetssirkelen og markerer punktet som tilsvarer vinkelen x. Vi definerer $\cos x$ og $\sin x$ til å være henholdsvis første og andre koordinat i dette punktet:



Funksjonen tangens defineres som kvotienten av sinus og cosinus:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Ved hjelp av enhetssirkelen kan vi blant annet finne følgende verdier:

$$\begin{array}{lll}
\sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 & \tan 0 = 0 \\
\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\
\sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \tan \frac{\pi}{2} \text{ er udefinert} \\
\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \tan \frac{3\pi}{4} = -1
\end{array}$$

For alle tall x kan vi bruke verdien av $\sin x$ eller $\cos x$ til å finne andre verdier av henholdsvis sinus- og cosinusfunksjonen etter følgende regler (som vi kan utlede ved å bruke enhetssirkelen):

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\
\sin(x+\pi) &= -\sin x & \cos(x+\pi) &= -\cos x \\
\sin(x+2\pi) &= \sin x & \cos(x+2\pi) &= \cos x
\end{aligned}$$

Vi har dessuten følgende sammenheng mellom sinus og cosinus (som vi kan utlede ved å bruke enhetssirkelen og Pythagoras' regel):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Grafene til de trigonometriske funksjonene sinus, cosinus og tangens er gitt i figur 1.

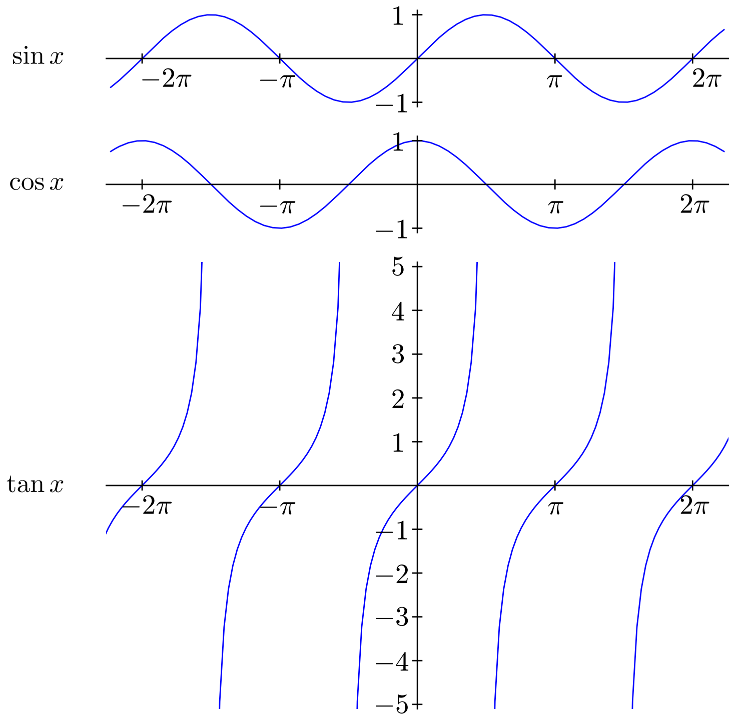
1.5 Eksponensial- og logaritmefunksjoner

For et positivt reelt tall a har vi eksponensialfunksjonen

$$f(x) = a^x, \qquad f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty).$$

Når eksponenten x er et naturlig, helt eller rasjonalt tall, er uttrykket a^x definert ved følgende regler (der n er et vilkårlig naturlig tall og m et vilkårlig heltall):

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ ganger}} \qquad\qquad a^0 = 1$$



Figur 1: Grafene til de trigonometriske funksjonene.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad\qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Vi har dessuten følgende regneregler for potenser:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
$$a^{xy} = (a^x)^y$$

For et positivt reelt tall b har vi logaritmefunksjonen med grunntall b:

$$g(x) = \log_b x, \qquad g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

Verdien $\log_b x$ er definert som det tallet vi må opphøye b i for å få x; altså det tallet som er slik at vi har

$$b^{\log_b x} = x.$$

Vi har følgende regneregler for logaritmer:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$
$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$
$$\log_b(x^k) = k \cdot \log_b x$$

For en vilkårlig eksponensialfunksjon a^x har vi at den deriverte er lik den opprinnelige funksjonen ganget med en konstant c (som avhenger av a):

$$\frac{d}{dx} a^x = c \cdot a^x.$$

Tallet $e \approx 2.71828$ er det tallet som er slik at denne konstanten blir 1. Vi har altså

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Logaritmefunksjonen med e som grunntall kalles den *naturlige logaritmen*, og skrives med navnet ln:

$$\ln x = \log_e x.$$

1.6 Sammensetting av funksjoner

Hvis vi har to funksjoner

$$f\colon B \to C \qquad \text{og} \qquad g\colon A \to B,$$

der A, B og C er mengder, definerer vi den *sammensatte funksjonen*

$$(f \circ g)\colon A \to C$$

ved

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

1.7 Grenseverdier

For en funksjon f og et tall a har vi:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) \quad &- \quad \text{verdien } f(x) \text{ nærmer seg når } x \text{ nærmer seg } a,\\
\lim_{x\to a^-} f(x) \quad &- \quad \text{verdien } f(x) \text{ nærmer seg når } x \text{ nærmer seg } a \text{ fra venstre},\\
\lim_{x\to a^+} f(x) \quad &- \quad \text{verdien } f(x) \text{ nærmer seg når } x \text{ nærmer seg } a \text{ fra høyre}.
\end{aligned}$$

Disse eksisterer ikke alltid.

Hvis begge de ensidige grenseverdiene eksisterer, og de er like, eksisterer den tosidige også, og vi har

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Hvis en av de ensidige grenseverdiene ikke eksisterer, eller de er ulike, eksisterer ikke den tosidige grenseverdien.

Vi definerer

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

som verdien $f(x)$ nærmer seg når vi lar x henholdsvis synke eller vokse ubegrenset. Vi definerer at en grenseverdi

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

er ∞ dersom verdien av $f(x)$ vokser grenseløst når x nærmer seg a, og $-\infty$ dersom verdien av $f(x)$ synker grenseløst når x nærmer seg a.

Hvis f er et polynom, har vi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

for alle x. Hvis f er en rasjonal funksjon, har vi den samme likheten for alle x som er i definisjonsmengden til f.

Hvis vi skal finne grenseverdien mot et punkt som *ikke* er i definisjonsmengden for en rasjonal funksjon, hjelper det ofte å forkorte bort felles faktorer i teller og nevner, som i følgende eksempel:

Eksempel. La

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10}.$$

Vi vil finne $\lim_{x\to 5} f(x)$.

Vi observerer at 5 ikke er i definisjonsmengden til f, så vi kan ikke bare regne ut $f(5)$. Vi faktoriserer polynomene i teller og nevner ved å bruke formelen for andregradslikninger, og får:

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x - 5 &= (x-5)(x+1)\\
x^2 - 7x + 10 &= (x-5)(x-2)
\end{aligned}$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} f(x) &= \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x-2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x+1}{x-2}\\
&= \frac{5+1}{5-2} = 2. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.8 Kontinuitet

Den intuitive betydningen av at en funksjon er *kontinuerlig* er at grafen til funksjonen er en sammenhengende kurve.

Vi definerer kontinuitet slik: En funksjon f er kontinuerlig i punktet a (et reelt tall) dersom

1. a er i definisjonsmengden til f, og
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ er definert, og
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funksjonen f er kontinuerlig på et intervall I dersom den er kontinuerlig i alle punkter som ligger i I.

Følgende funksjoner er kontinuerlige i alle punkter:

- Polynomer.
- De trigonometriske funksjonene $\sin x$ og $\cos x$.
- Enhver eksponensialfunksjon a^x (for et positivt tall a).

Følgende funksjoner er kontinuerlige i alle punkter som ligger i funksjonenes definisjonsmengder:

- Rasjonale funksjoner.
- Den trigonometriske funksjonen $\tan x$.
- Enhver logaritmefunksjon $\log_b x$ (for et positivt tall b).

2 Derivasjon

Den *deriverte* av en funksjon er en ny funksjon som uttrykker hvor raskt den opprinnelige funksjonen stiger i hvert punkt. Hvis f er en funksjon, skriver vi f' for den deriverte av f, og definerer

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi bruker også notasjonen $\frac{d}{dx} f(x)$ for $f'(x)$.

2.1 Deriverbarhet

En funksjon f er *deriverbar* i et punkt a hvis verdien $f'(a)$ er definert, altså hvis den aktuelle grenseverdien eksisterer og er endelig.

Vi kan beskrive dette på en annen måte. For at en funksjon f skal være deriverbar i et punkt a, må alle disse kravene være oppfylt:

1. Funksjonen f er kontinuerlig i a.
2. Grafen til $f(x)$ har ikke noen «knekk» ved $x = a$.
3. Grafen til $f(x)$ har ikke vertikal tangent ved $x = a$.

2.2 Derivasjonsregler

De mest grunnleggende derivasjonsreglene (c og a er konstanter (reelle tall), og f og g er funksjoner):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}c &= 0\\ \frac{d}{dx}x^a &= ax^{a-1}\\ \frac{d}{dx}\big(c\cdot f(x)\big) &= c\cdot f'(x)\\ \frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

Tre litt mer kompliserte regler (som har egne navn):

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \text{(produktregelen)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} \qquad \text{(kvotientregelen)}$$

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{(kjerneregelen)}$$

For de trigonometriske funksjonene sinus og cosinus har vi reglene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x\\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x\end{aligned}$$

For eksponensialfunksjonen e^x og den naturlige logaritmen har vi reglene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= e^x\\ \frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

2.3 Høyereordens deriverte

Vi skriver f'' for den deriverte av den deriverte av f'. Denne kalles den *andrederiverte* av f. Videre har vi den tredjederiverte f''', og så videre. Vi skriver $f^{(n)}$ for den n-tederiverte av f, der n er et naturlig tall.

3 Funksjonsdrøfting

Vi kan bruke den deriverte og andrederiverte til å finne egenskaper ved grafen til en funksjon, som topp- og bunnpunkter, krumning (om den er «smilende» eller «sur») og vendepunkter.

Vi kan bruke grenseverdier til å finne asymptoter til en graf, altså rette linjer som grafen nærmer seg når vi følger den langt ut i en retning.

Disse egenskapene er nyttige for å skissere grafen.

3.1 Lokale topp- og bunnpunkter

En funksjon f har *lokalt toppunkt* i a dersom funksjonsverdien $f(a)$ er den høyeste verdien f får i et intervall omkring a; altså dersom det finnes et intervall I slik at

$$a \in I \qquad \text{og} \qquad f(x) \leq f(a) \text{ for alle } x \in I.$$

Tilsvarende: Funksjonen f har *lokalt bunnpunkt* i a dersom funksjonsverdien $f(a)$ er den laveste verdien f får i et intervall omkring a; altså dersom det finnes et intervall I slik at

$$a \in I \qquad \text{og} \qquad f(x) \geq f(a) \text{ for alle } x \in I.$$

Vi kan finne lokale topp-/bunnpunkter ved å bruke følgende resultat: Hvis f har et lokalt topp- eller bunnpunkt i a, så er den deriverte $f'(a)$ enten udefinert eller 0 (slike punkter kaller vi *kritiske punkter*). Gitt et punkt a slik at $f'(a) = 0$ kan vi finne ut om det er topp- eller bunnpunkt ved å se på den andrederiverte:

- Hvis $f''(a) > 0$, er det et bunnpunkt.
- Hvis $f''(a) < 0$, er det et toppunkt.
- Hvis $f''(a) = 0$, er det hverken topp- eller bunnpunkt.

3.2 Globale topp- og bunnpunkter

En funksjon f har *globalt toppunkt* i a dersom funksjonsverdien $f(a)$ er den høyeste verdien f har noe sted; altså hvis

$$f(x) \leq f(a) \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden til } f.$$

Tilsvarende: Funksjonen f har *globalt bunnpunkt* i a dersom funksjonsverdien $f(a)$ er den laveste verdien f har noe sted; altså hvis

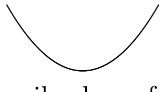
$$f(x) \geq f(a) \text{ for alle } x \text{ i definisjonsmengden til } f.$$

Et globalt topp-/bunnpunkt må enten være et lokalt topp-/bunnpunkt, eller ligge i et endepunkt for definisjonsmengden eller på et sted der den deriverte er udefinert.

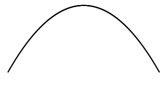
Vi har følgende resultat som garanterer eksistens av globale topp- og bunnpunkter i visse tilfeller: La f være en funksjon som er deriverbar på et lukket intervall $[a, b]$. Da har f en minimal og en maksimal verdi på intervallet.

3.3 Konkavitet og vendepunkter

Vi sier at en funksjon f er *konkav opp* på et intervall I dersom den deriverte f' er stigende på hele intervallet, og *konkav ned* på et interfall I dersom den deriverte f' er synkende på hele intervallet. At funksjonen er konkav opp eller ned tilsvarer at grafen ser smilende eller sur ut:



smilende graf
konkav opp
f' stigende



sur graf
konkav ned
f' synkende

At f' er stigende er det samme som at f'' er positiv (gitt at den andrederiverte er definert). Vi har altså at f er konkav opp på et intervall I dersom $f''(x) > 0$ for alle $x \in I$. Tilsvarende har vi at f er konkav ned på et intervall I dersom $f''(x) < 0$ for alle $x \in I$.

Et punkt på grafen der konkaviteten skifter fra opp til ned eller fra ned til opp kalles et *vendepunkt*. Siden fortegnet til f'' avgjør om funksjonen er konkav opp eller ned, må vi ha $f''(x) = 0$ eller $f''(x)$ udefinert for at x skal være et vendepunkt for f. Men den andrederiverte kan være 0 eller udefinert i punkter som ikke er vendepunkter også. Når vi er på jakt etter vendepunkter vil vi altså først lete etter punkter der den andrederiverte er udefinert eller 0, og så sjekke for hvert av disse om konkaviteten faktisk er forskjellig til venstre og høyre for punktet.

3.4 Horisontale asymptoter

Linjen $y = a$ (for et bestemt tall a) er en *horisontal asymptote* for funksjonen f dersom

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

En horisontal asymptote er altså en horisontal (vannrett) linje som grafen til funksjonen nærmer seg når vi går langt nok ut til venstre eller høyre.

For rasjonale funksjoner finner vi horisontale asymptoter på følgende vis. La

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

være en rasjonal funksjon (p og q er polynomer). Da er det tre mulige tilfeller:

1. Hvis graden til p er større enn graden til q, har f ingen horisontal asymptote.

2. Hvis graden til p er mindre enn graden til q, har f den horisontale asymptoten $y = 0$.

3. Hvis graden til p er lik graden til q, har f en horisontal asymptote. Hvis vi skriver p og q som

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$
$$q(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \cdots + d_1 x + d_0;$$

   har vi at den horisontale asymptoten til f er linjen $y = \frac{c_n}{d_n}$.

Eksempel. 1. Funksjonen $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 7}{6x + 2}$ har ingen horisontal asymptote siden tellerpolynomet har grad 3 og nevnerpolynomet har grad 1.

2. Funksjonen $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^4 + 3x^3}$ har horisontal asymptote $y = 0$ siden tellerpolynomet har grad 2 og nevnerpolynomet har grad 4.

3. Funksjonen $h(x) = \frac{7x^5 + 3x^2 + x - 4}{3x^5 - 8x}$ har horisontal asymptote $\frac{7}{3}$, siden begge polynomene har grad 5 og koeffisientene foran femtegradsleddene er henholdsvis 7 og 3. ■

3.5 Vertikale asymptoter

Linjen $x = a$ (for et bestemt tall a) er en *vertikal asymptote* for funksjonen f dersom

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

For rasjonale funksjoner finner vi vertikale asymptoter på følgende vis. La

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

være en rasjonal funksjon, og anta at den er skrevet på redusert form (altså at polynomene p og q ikke har noen felles faktorer). Da har f en vertikal asymptote ved hvert nullpunkt for polynomet q.

Eksempel. Vi vil finne eventuelle vertikale asymptoter for funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 8x}.$$

Vi ser at både teller- og nevnerpolynomet inneholder faktoren x, så vi forkorter bort denne:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8}.$$

Ved å bruke formelen for andregradslikninger finner vi at polynomet $x^2 - 2x - 8$ har nullpunktene -2 og 4. Dermed kan det faktoriseres som $(x + 2)(x - 4)$, så vi har

$$f(x) = \frac{x + 5}{(x + 2)(x - 4)}.$$

Her er det tydelig at f er skrevet på redusert form. Vi får dermed at f har de to vertikale asymptotene

$$x = -2 \qquad \text{og} \qquad x = 4.$$

■

3.6 Skrå asymptoter

Hvis grafen til en funksjon f nærmer seg en vannrett linje når x blir veldig stor eller veldig liten, har f horisontal asymptote. Men hvis grafen nærmer seg en rett linje som ikke er vannrett, har f skrå asymptote.

Vi definerer skrå asymptote slik: Hvis f er en funksjon, og l er en funksjon på formen

$$l(x) = ax + b \qquad \text{der } a \neq 0,$$

så er linjen beskrevet av l en *skrå asymptote* for f dersom

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - l(x)) = 0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to \infty} (f(x) - l(x)) = 0.$$

For rasjonale funksjoner har vi følgende: Hvis

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

er en rasjonal funksjon, og graden til p er én større enn graden til q, så har f en skrå asymptote. For å finne denne kan vi dele p på q (polynomdivisjon). Da får vi skrevet f som

$$f(x) = l(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

der l er et førstegradspolynom og r er et polynom av lavere grad enn q. Vi får at

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - l(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0,$$

så linjen beskrevet av l er skrå asymptote for f.

Eksempel. Vi vil finne eventuell skrå asymptote for funksjonen

$$f(x) = \frac{3x^3 + 10x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x - 1}.$$

Vi ser at telleren har grad 3 og nevneren grad 2, altså er graden til telleren én større enn graden til nevneren, og funksjonen skal altså ha skrå asymptote. Polynomdivisjonen

$$(3x^3 + 10x^2 + 6x + 3) \ : \ (x^2 + 2x - 1)$$

gir kvotient $3x + 4$ og rest $x + 7$. Ved resultatet over har vi dermed at $3x + 4$ er skrå asymptote for f.

Vi kan også kontrollere at det stemmer for dette eksempelet. Resultatet av polynomdivisjonen forteller oss at vi kan skrive $f(x)$ som

$$f(x) = (3x + 4) + \frac{x + 7}{x^2 + 2x - 1}$$

Vi har dermed

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (3x + 4)\big) &= \lim_{x\to\infty} \Big((3x + 4) + \frac{x + 7}{x^2 + 2x - 1} - (3x + 4)\Big) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x + 7}{x^2 + 2x - 1} = 0. \end{aligned}$$

■

4 Integrasjon

4.1 Bestemt og ubestemt integral

Vi definerer bestemt integral ved hjelp av *riemannsummer*. La f være en funksjon, og a og b tall (der $a < b$). Vi vil at det bestemte integralet av en f fra a til b skal uttrykke arealet under grafen til $f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$. Vi kan tilnærme dette arealet ved å dele intervallet $[a, b]$ i n deler

$$[x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \ldots,\ [x_n, x_{n+1}].$$

Hvert av disse intervallene får bredde

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Nå blir summen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

(som vi kaller en riemannsum) en tilnærming til arealet. Ved å velge stadig større verdier for n (og dermed mindre verdier for Δx), får vi stadig bedre tilnærminger til arealet. Vi definerer det bestemte integralet ved å ta grenseverdien når Δx går mot 0:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x.$$

Ubestemt integral defineres ved *antiderivasjon.* La f være en funksjon. Vi sier at en funksjon F er en *antiderivert* av f dersom $F'(x) = f(x)$. Vi definerer da det ubestemte integralet av $f(x)$ med hensyn på x til å være $F(x)$ pluss en vilkårlig konstant C:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Analysens fundamentalteorem forteller oss hvordan disse to definisjonene er relatert. Mer konkret sier det hvordan vi kan bruke antiderivasjon til å finne bestemte integraler. La a og b være reelle tall (med $a < b$), og la f være en funksjon som er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Fundamentalteoremet sier at hvis F er en antiderivert av f, altså hvis

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

så kan vi finne det bestemte integralet av f fra a til b ved

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ved utregning av bestemte integraler skriver vi gjerne $[F(x)]_a^b$ for uttrykket $F(b) - F(a)$, som vist i det følgende eksempelet.

Eksempel. Vi vil regne ut integralet

$$\int_2^5 (3x^2 + 4)\,dx.$$

Vi ser at $x^3 + 4x$ er en antiderivert til $3x^2 + 4$, siden

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4x) = 3x^2 + 4.$$

Vi har dermed at det ubestemte integralet er

$$\int (3x^2 + 4)\,dx = x^3 + 4x + C.$$

Det bestemte integralet blir da

$$\int_2^5 (3x^2 + 4)\,dx = \left[x^3 + 4x\right]_2^5 = (5^3 + 4 \cdot 5) - (2^3 + 4 \cdot 2) = 129. \qquad \blacksquare$$

4.2 Integrasjonsregler

Ved å benytte derivasjonsreglene våre baklengs får vi følgende regler for ubestemte integraler:

$$
\begin{aligned}
\int a\,dx &= ax + C \\
\int x^a\,dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \qquad \text{(for } a \neq -1\text{)} \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int a\cdot f(x)\,dx &= a\cdot\int f(x)\,dx \\
\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

For bestemte integraler har vi dessuten et resultat som sier at vi kan beregne integralet ved å dele opp det aktuelle intervallet i to, regne ut integralet på hver del, og så legge de to integralene sammen. Mer presist: Hvis $a < b < c$, har vi

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Dette er nyttig fordi det ikke alltid er mulig å finne én antiderivert som gjelder for hele intervallet, for eksempel når funksjonen vi skal integrere er gitt ved delt forskrift.

Eksempel. Vi vil finne det bestemte integralet av funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < 0, \\ \sin x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

fra -3 til π. Vi deler opp integralet ved 0, og får

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \int_{-3}^{0} x^2\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx \\
&= \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{-3}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} \\
&= \Big(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - \frac{1}{3}\cdot(-3)^3\Big) + \Big(-\cos\pi + \cos 0\Big) = 11. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

4.3 Substitusjon

Integrasjon ved substitusjon er egentlig bare kjerneregelen brukt baklengs. Hvis vi skal integrere et uttrykk på formen $f'(g(x)) \cdot g'(x)$, får vi ved kjerneregelen at

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x)) + C.$$

Problemet er å få integralet til å være på akkurat denne formen.

For å gjøre notasjonen litt enklere, skriver vi gjerne u for $g(x)$. Da kan likheten over skrives som

$$\int f'(u) \cdot \frac{du}{dx}\, dx = f(u) + C.$$

Men $f(u)$ er en antiderivert av $f'(u)$, så vi får

$$\int f'(u) \cdot \frac{du}{dx}\, dx = \int f'(u)\, du$$

Denne likheten betyr at vi kan late som om du og dx er variabler, og $\frac{du}{dx}$ bare en vanlig brøk, slik at vi kan forkorte bort dx fra uttrykket $\frac{du}{dx}dx$. Når vi utfører substitusjon i praksis, er det dette vi typisk gjør.

Eksempel. Vi vil finne det ubestemte integralet

$$\int (\sin x)^2 \cdot (\cos x)\, dx.$$

Vi bruker substitusjonen $u = \sin x$. Da får vi

$$\frac{du}{dx} = \cos x.$$

Vi vil nå behandle du og dx som variabler og $\frac{du}{dx}$ som en brøk. Vi kan dermed flytte over dx og få

$$du = (\cos x)dx.$$

Nå kan vi erstatte $\sin x$ med u og $(\cos x)dx$ med du i integralet vårt. Da får vi

$$\int (\sin x)^2 \cdot (\cos x)\, dx = \int u^2\, du.$$

Vi har nå fått et nytt og enklere integral, der vi integrerer med hensyn på u istedenfor x. Vi regner ut dette integralet og setter deretter inn $\sin x$ for u:

$$\int (\sin x)^2 \cdot (\cos x)\, dx = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C. \qquad \blacksquare$$

4.4 Delvis integrasjon

Delvis integrasjon er en integrasjonsteknikk basert på produktregelen for derivasjon. La f og g være to funksjoner. Produktregelen sier at vi har

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Uttrykket $f(x) \cdot g(x)$ er altså en antiderivert av det som står på høyresiden, så vi har

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x).$$

Hvis vi flytter over det andre leddet på venstresiden til høyre, får vi

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx,$$

som er regelen for delvis integrasjon.

Delvis integrasjon gir oss altså et nytt integral der vi har antiderivert én faktor i det opprinnelige integralet (vi får $f(x)$ istedenfor $f'(x)$) og derivert den andre (vi får $g'(x)$ istedenfor $g(x)$). Det gjelder dermed å klare å finne en måte å dele opp uttrykket vi skal integrere i to faktorer slik at vi får et enklere uttrykk når den ene faktoren blir antiderivert og den andre blir derivert.

Eksempel. Vi vil finne det ubestemte integralet

$$\int x \cdot \sin x\,dx.$$

Vi vil bruke delvis integrasjon, og velger å dele opp uttrykket vi skal integrere i faktorene

$$f'(x) = \sin x \qquad \text{og} \qquad g(x) = x.$$

Da får vi

$$f(x) = -\cos x \qquad \text{og} \qquad g'(x) = 1.$$

Ved regelen for delvis integrasjon har vi da

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin x\,dx &= (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1\,dx \\ &= -x \cdot \cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

■

4.5 Areal under grafer

Verdien av et bestemt integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

er arealet under grafen til $f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$ (med negativt fortegn der funksjonsverdien er negativ). Hvis funksjonen f er positiv overalt på intervallet $[a, b]$, er dette rett og slett arealet av området mellom x-aksen, grafen til $f(x)$ og linjene $x = a$ og $x = b$. Hvis funksjonen er negativ overalt på intervallet, er integralet lik arealet med negativ fortegn. Hvis funksjonen er positiv noen steder og negativ andre, blir integralet differansen mellom arealene der den er positiv og arealene der den er negativ.

Eksempel. Vi ser på funksjonen $\cos x$ mellom $x = 0$ og $x = \frac{3\pi}{2}$. Funksjonsverdien er positiv mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$, deretter negativ.

Vi ser først på bare den delen der funksjonen er positiv:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Dette betyr at arealet mellom x-aksen, grafen til $\cos x$ og linjene $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$ er 1.

La oss nå se på delen der funksjonen er negativ:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2.$$

Dette betyr at arealet mellom x-aksen, grafen til $\cos x$ og linjene $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{3\pi}{2}$ er 2.

Hvis vi regner ut integralet over hele intervallet fra 0 til $\frac{3\pi}{2}$ skal vi få differansen mellom disse arealene, altså -1. Vi sjekker dette ved å regne det ut:

$$\int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{3\pi/2} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0 = -1 - 0 = -1. \qquad \blacksquare$$

4.6 Volum av omdreiningslegemer

La f være en funksjon, og se på grafen til f på et intervall $[a, b]$. Hvis vi roterer denne en hel omdreining rundt x-aksen, får vi en tredimensjonal figur som kalles et *omdreiningslegeme*. Vi kan bruke integrasjon til å finne volumet av en slik figur.

Volumet V til et omdreiningslegeme som beskrevet over er gitt ved formelen

$$V = \int_a^b \pi \cdot \big(f(x)\big)^2 \, dx.$$

4.7 Differensiallikninger

En *differensiallikning* er en likning der den ukjente er en funksjon, og den deriverte av denne funksjonen inngår i likningen.

Vi løser differensiallikninger ved *separasjon av variabler*. Det vil si at hvis den ukjente heter y og er en funksjon av x, så forsøker vi å få alt som inneholder y på den ene siden av likningen, og alt som inneholder x på den andre. Da kan vi integrere på begge sider (med hensyn på henholdsvis y og x) for å få en likning som ikke inneholder noen deriverte.

For å få dette til å fungere, må vi skrive den deriverte som $\frac{dy}{dx}$ og behandle uttrykkene dy og dx som variabler.

Eksempel. Vi vil løse likningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y}.$$

Vi flytter over så vi får alt med y til venstre og alt med x til høyre:

$$2y \, dy = x^2 \, dx$$

Vi integrerer på begge sider:

$$\int 2y\,dy = \int x^2\,dx$$
$$y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Vi kan nå løse likningen med hensyn på y:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C}.$$

Merk at vi får uendelig mange løsninger, siden C kan være et hvilket som helst reelt tall (og for hver mulige verdi av C får vi dessuten to forskjellige løsninger avhengig av om vi velger $+$ eller $-$ i $\pm$). ■

I et *initialverdiproblem* har vi en differensiallikning sammen med én kjent verdi av den ukjente funksjonen. Når vi løser et initialverdiproblem vil vi vanligvis først løse differensiallikningen, og så sette inn den kjente verdien for å bestemme den vilkårlige konstanten som dukket opp da vi integrerte (og eventuelt bestemme fortegn hvis det har sneket seg inn en $\pm$, som i eksempelet over).