Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i MA0003, Brukerkurs i matematikk for informatikere

Mandag 10. oktober, 2011

FASIT

Oppgave 1 Riktig svar: **d**

Oppgave 2 Riktig svar: **c**

Løsning: For at $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-x}$ skal være definert, må vi ha

$$1 - x^2 \geq 0 \qquad \text{og} \qquad x^2 - x \neq 0.$$

Dette betyr at vi må ha $x \in [-1, 1]$ og $x \neq 0$ og $x \neq 1$, så definisjonsområdet til f blir $[-1, 0) \cup (0, 1)$.

Oppgave 3 Riktig svar: **d**

Løsning: For at $f(x) = \ln(x^2)$ skal være definert, må vi ha $x^2 > 0$, altså $x \neq 0$.

Oppgave 4 Riktig svar: **a**

Hint: Bruk derivasjonsregelen $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ og produktregelen.

Oppgave 5 Riktig svar: **b**

Oppgave 6 Riktig svar: **c**

Hint: Bruk derivasjonsregelen $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ og kjerneregelen.

Oppgave 7 Riktig svar: **b**

Løsning: Vi har $f(x) = x^3 - x + 1$. Den deriverte er $f'(x) = 3x^2 - 1$, og den andrederiverte er $f''(x) = 6x$. Vi har $f'(x) = 0$ for $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Siden $f''(-1/\sqrt{3}) < 0$ og $f''(1/\sqrt{3}) > 0$, har f et lokalt maksimum ved $x = -1/\sqrt{3}$ og et lokalt minimum ved $x = 1/\sqrt{3}$. Siden den deriverte er definert på hele $\mathbb{R}$, finnes det ingen flere kritiske punkter, og dermed heller ingen flere lokale maksima.

Oppgave 8 Riktig svar: **c**

Løsning: Vi har $f(x) = xe^x$. Den deriverte er $f'(x) = (x+1)e^x$, og den andrederiverte er $f''(x) = (x+2)e^x$. Det eneste nullpunktet til $f''(x)$ er ved $x = -2$ (siden $e^x \neq 0$ for alle x), så dette er det eneste stedet f kan ha et vendepunkt.

Oppgave 9 Riktig svar: **b**

Løsning: Vi ser på funksjonen $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ på det lukkede intervallet $[-1, 1]$. Siden en kvadratrot aldri er negativ, har vi $f(x) \geq 0$ for alle x i definisjonsmengden til f. Videre observerer vi at $f(1) = 0$. Dermed er 0 den laveste verdien f kan ha i intervallet $[-1, 1]$.

Oppgave 10 Riktig svar: **b**

Løsning: Vi har $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-3}$. Vi deriverer to ganger, og får

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{4}{(x-3)^3}$$

Når vi setter inn $3 - \sqrt{2}$, får vi

$$f'(3 - \sqrt{2}) = 0 \qquad \text{og} \qquad f''(3 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0.$$

Dette betyr at $3 - \sqrt{2}$ er et lokalt maksimum for f.

Oppgave 11 Riktig svar: **a**

Løsning: Vi har $f(x) = x^2 + x + 1$. Den deriverte er $f'(x) = 2x + 1$. Stigningstallet til $f(x)$ ved $x = 3$ er $f'(3) = 7$. Likningen for tangentlinjen skal altså være på formen $y = 7x + b$, der b er et tall. Vi vet at for $x = 3$ skal vi ha $y = f(3) = 13$, så vi har $13 = 7 \cdot 3 + b$, som gir $b = -8$.

Oppgave 12 Riktig svar: **b**

Løsning: Ved å dele $(x^2 - 1)$ på $(x - 1)$ (polynomdivisjon), finner vi at

$$x^2 - 1 = (x - 2)(x + 2) + 3,$$

og vi får

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x - 2}.$$

Oppgave 13 Riktig svar: **c**

Løsning: Vi har funksjonen $f(x) = \frac{x^2}{3x^2+7}$. Siden polynomene i teller og nevner har samme grad, kan vi finne den horisontale asymptoten ved å ta kvotienten av koeffisientene for leddene av høyest grad, altså $\frac{1}{3}$.

Oppgave 14 Riktig svar: **b**

Løsning: Funksjonen $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4x+4}$ har en vertikal asymptote for hvert nullpunkt til polynomet i nevneren. Siden $x^2 + 4x + 4$ har ett nullpunkt ($x = -2$), har f én vertikal asymptote.

Oppgave 15 Riktig svar: **c**