Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under Midtsemester-prøve:
Førsteamanuensis Ole Enge
Telefon: 5 02 89

MA0301, Elementær diskret matematikk

Bokmål
Torsdag 9. oktober 2003
Gruppe 1-4 Kl. 08.30-09.45 og gruppe 5-8 kl. 10.15-11.30
Hjelpemidler: Inntil 1 A4-ark med egne notater, håndskrevne eller maskinskrevne. Det kan skrives på begge sider. Godkjent kalkultator, HP30S.
Sensur: 23. oktober 2003

Oppgave med løsningsforslag.

Oppgave 1

Fra en gruppe på 12 studenter skal det dannes en referansegruppe bestående av fire studenter.

a) Hvor mange ulike referansegrupper kan det dannes?

(i) 11880 (ii) 605 (iii) 495 (iv) 5800

Vi spør ikke etter ordning (rekkefølge), så svaret er gitt ved
$(12, 4) = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$

b) Av de 12 studentene er det fire jenter. Hvor mange referansegrupper kan vi få hvis minst en jente skal være med?

(i) 425 (ii) 535 (iii) 5730

Minst en jente skal være med. Så finner vi antall grupper der ingen jenter er med har vi kommet langt.
Ingen jenter, jo det må det jo være $\binom{8}{4} = 70$. *Så svaret er* $495 - 70 = 425$.

c) Hvor mange referansegrupper kan vi få hvis minst en jente og minst en gutt skal være med?

(i) 424 (ii) 534 (iii) 5729 (iv) 355

Minst en gutt og minst en jente. Vi har 425 *med minst en jente, av disse er det* $1 = \binom{4}{4}$ *som ikke inneholder minst en gutt. Derfor er svaret* $425 - 1 = 424$.

d) På hvor mange måter kan det velges en leder, nestleder, sekretær og en kontaktperson fra gruppen av 12 studenter.

(i) 605 (ii) 11880 (iii) 205 (iv) 10440

Bruk produktregelen, vi velger leder først, så nestleder osv.
Vi har $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$ *ulike måter.*

Oppgave 2

Det sammensatte logiske uttrykket

$$(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$$

er logisk ekvivalent med

$$(i) \neg q \rightarrow \neg p \qquad (ii) \neg p \wedge q \qquad (iii) \neg(q \vee p)$$

$(p \rightarrow q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$ *er logisk ekvivalent med* $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ *(først kommutativ lov så absorbsjonsloven)*
som er logisk ekvivalent med $(\neg p \vee q) \wedge \neg q$ *(fra eksempel 27 side 55)*
som er logisk ekvivalent med $(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$ *(assosiativ lov)*
som er logisk ekvivalent med $(\neg q \wedge \neg p) \vee F_0$ *(invers lov)*
som er logisk ekvivalent med $\neg q \wedge \neg p$ *(identitetsloven)*
som er logisk ekvivalent med $\neg(q \vee p)$ *(De Morgans lov).*

Oppgave 3

Hvilke av de følgende utsagn er sanne og hvilke er usanne? (S) = Sann, (U) = Usann

a)	$\{\{1\}\} = \{1, \{1\}\}$	*(i)*	S	*(ii)*	U
b)	$\emptyset \in \emptyset$	*(i)*	S	*(ii)*	U
c)	$\|\{\emptyset\}\| = 2$	*(i)*	S	*(ii)*	U
d)	$\emptyset \subset \{\emptyset\}$	*(i)*	S	*(ii)*	U
e)	$\emptyset \in \{X\}$	*(i)*	S	*(ii)*	U

a) *Usant* $1 \notin \{\{1\}\}$.

b) *Usant Ø inneholder ingen elementer.*

c) *Usant,* $|\{\emptyset\}| = 1$.

d) *Sant, Ø er delmengde av alle mengder (resultat side 127).*

e) *Usant, mengden* $\{X\}$ *inneholder ett element, nemlig* X *og* $X \neq \emptyset$.

Oppgave 4

Professor Kari og hennes mann Per holder et selskap. Gjestene er fire gifte par. Noen av gjestene håndhilser når de møtes. Naturlig nok hilser ikke et gift par på hverandre og ingen hilser flere ganger på hverandre. Ved slutten av selskapet spør Kari alle de andre om hvor mange de hadde håndhilst på. Hun får ni ulike svar. Hvor mange hadde håndhilst på Per?

Først så kan det se ut til at vi ikke har nok informasjon. Men hvis vi samler all info som er gitt og prøver å uttrykke den med matematiske symboler og bruker enkel men presis logikk, så kommer løsningen enkelt. Vi har gitt følgende informasjon:
- 10 personer, 5 ektepar.
- Ingen ektefeller hilser på hverandre.
- Kari får 9 ulike svar.
Svarene kan være $0, 1, 2,$ *osv. Men hva er det største antallet en person kan ha hilst på? Jo, 8. Så svarene må være 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Nå har du en god notasjon for mengden av personer tilstede. Benevn disse:* $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, K$ *der*
$P_0 =$ *person som ikke hilste på noen*
$P_1 =$ *person som hilste på 1 annen*
$P_2 =$ *person som hilste på 2 andre osv.*
$K =$ *Kari.*
Merk at vi har løst oppgaven hvis vi kan vise at Per er P_K *for en verdi av* K*. For å komme videre må vi finne ut hvem som er ektefeller. Kan vi det? Ja, ta* P_8*. Denne personen har hilst på alle bortsett fra seg selv og ektefellen. Spesielt har ikke* P_8 *hilst på* P_0 *(som jo ikke har hilst på noen). Så* P_8 *og* P_0 *må være gifte. Nå står vi igjen med* $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 og K$*.* P_7 *har hilst på alle i denne gruppen og* P_8 *bortsett fra seg selv og ektefellen.* P_1 *har hilst på* P_8*, så vi konkluderer med at* P_7 *ikke har hilst på* P_1*. Dvs.* P_7 *er gift med* P_1*. Videre vil vi ved å bruke samme argumentasjon se at* P_6 *er gift med* P_2*.* P_5 *er gift med* P_3*. Nå gjenstår kun* P_4*, dvs. Kari er gift med* P_4 *som er Per.*

Altså har Per hilst på 4 personer.

Oppgave 5

Vis at i et selskap med minst to personer så finnes to personer som har det samme antallet venner tilstede ved festen.

(Vi antar at hvis x er en venn av y så er y en venn av x).

Her får vi en mistanke om at Hanske-Lomme prinsippet gir løsningen. Så la det være n personer tilstede. La x være en person på festen. Hun kan ha $0, 1, 2, \cdots, n-1$ *venner tilstede. 'Fordeler' vi disse tallene, ett i hver lomme, får vi n lommer. Så vi har n 'hansker' og n lommer! Kan ikke bruke prinsippet. Men merk at hvis en person y har* $n-1$ *venner tilstede, så er alle venner med y, dvs. ingen har 0 venner tilstede. Med andre ord, spør vi alle om hvor mange venner de har tilstede kan vi ikke få til svar både 0 og* $n-1$*, Ett av den må bort. Altså n personer (hansker) og* $n-1$ *mulige lommer.*

Hanske-lomme prinsippet gir at minst to personer har samme antall venner tilstede.