LØSNINGSFORSLAG TIL FØRSTE OBLIGATORISKE ØVING I MA0301 HØSTEN - 03

OPPGAVE 1 × 26/11 - 01

a) Siden vi ikke har fått oppgitt at det er noen forskjell på brødskivene, antar jeg at rekkefølgen pålegget velges i ikke har noen betydning. Altså skal vi velge 3 av 8 distinkte objekter uten tilbakelegging og uten å ta hensyn til rekkefølge, og vi må derfor bruke kombinasjoner. Svaret blir da

$$\binom{8}{3} = 56 \text{ ∴ forskjellige måter.}$$

b) Vi har nå fått oppgitt at vi har 3 ostetyper blant påleggene, og at vi ønsker at en av de tre skivene skal være med ost. Dette kan tolkes på to måter, nemlig

1) nøyaktig en skive skal være med ost
2) minst en skive skal være med ost

Siden oppgaveteksten er tvetydig, skal jeg løse oppgaven på begge måter.

1)

Her deler vi utvelgingsprosedyren opp i to trinn:

- Å velge ut et ostepålegg. Siden vi har tre oster, blir det naturlig nok 3 valg
- Å velge ut to av de resterende påleggene. Her skal vi velge 2 av 5, uten tilbakelegging og uten hensyn til rekkefølge, så vi får $\binom{5}{2} = 10$ valg

Ved produktregelen får vi da totalt

$3 \cdot 10 = 30$ ∴ muligheter

2)

Antall måter å velge minst et ostepålegg er lik antall måter å velge fritt (som vi vet fra a)) minus antall måter å velge 0 ostepålegg på. Siden vi har fem slike ikke-ostepålegg, ser vi at vi kan velge tre slike på $\binom{5}{3} = 10$ måter

$\Rightarrow$ Vi får totalt $56 - 10 = 46$ måter.

c) Vi skal fordele 9 salamiskiver på 3 ulike brødskiver, slik at hver brødskive får minst en salamiskive hver. Velger da å ta ut 3 salamiskiver og legge dem på hver sin brødskive, og så fordele de 6 gjenværende på de tre ulike brødskivene vha. distribusjoner. Siden vi da skal fordele 6 objekter i tre ulike beholdere får vi da

$$\binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = 28 \quad \text{:: fordelinger}$$

OPPGAVE 1 X 17/12 - 98

Her har vi en myntsamling bestående av 10 mynter, der 5 av dem er like og de 5 resterende alle unike. Skal finne ut hvor mange måter vi kan velge ut fem av disse myntene.

Her må vi ta hensyn til at 5 av myntene er helt like, og at det derfor alltid er bare en måte å velge av disse på, uansett hvor mange vi velger.
Deler opp i tilfeller:

- Velger de 5 like myntene. Dette kan bare gjøres på en måte.
- Velger 4 av de like og 1 av de unike. Det kan gjøres på hhv. 1 og 5 måter (siden vi har 5 unike mynter), og vi får ved produktregelen $1 \cdot 5 = 5$ måter.
- Velger 3 av de like og 2 av de unike. Dette kan gjøres på hhv. 1 og $\binom{5}{2}$ måter (utvalg av 2 av 5 uten tilbakelegging og uten hensyn til rekkefølge) $\Rightarrow 1 \cdot \binom{5}{2} = 10$ måter.
- Velger 2 av de like og 3 av de unike, som kan gjøres på 1 og $\binom{5}{3}$ måter $\Rightarrow 1 \cdot \binom{5}{3} = 10$
- Velger 1 av de like og 4 av de unike, som kan gjøres på 1 og $\binom{5}{4}$ måter $\Rightarrow 1 \cdot \binom{5}{4} = 5$
- Velger de fem unike myntene $\Rightarrow$ 1 måte

Vi får da ved summasjonsregelen at vi kan velge de 5 myntene på

$$1+5+10+10+5+1 = 32 \quad \text{:: måter}$$

OPPGAVE 1 x 28/5-01

a) Her skal vi velge 4 av 7 emner, uten hensyn til rekkefølge og uten tilbakelegging (et fag kan kun tas en gang), så vi får da

$$\binom{7}{4} = 35 \text{ mulige valg}$$

b) Antall måter å velge maksimalt 2 emner innen diskret matematikk er lik antall frie valg minus antall måter å velge 3 emner innen diskret matematikk på. Dette siste blir lik 4, for når vi har valgt tre diskret matematikk-fag, står det igjen 4 muligheter for det 4. faget. Svaret blir da

$$\binom{7}{4} - 4 = 35 - 4 = 31 \text{ mulige valg}$$

OPPGAVE 1 × 27/11 - 95

a)

Anta at Ronny er ridder. Da forteller han sannheten, og begge to må være riddere. Men i såfall lyger Robin, slik at Ronnys utsagn ikke kan stemme. Altså er Ronny væpner. Men da forteller Robin sannheten om hva Ronny er, og Robin må derfor være ridder.

b)

Anta at Harry er ridder. Da er utsagnet hans sant, men han motsier jo seg selv, noe som ikke går an $\Rightarrow$ Harry må være væpner.

Anta videre at Oluf er ridder. Siden vi vet at Harry er væpner, må da alle de gjenværende være riddere. Men det er umulig siden f.eks. Alexander og Kermit motsier hverandre, så Oluf må være væpner.

Anta så at Kermit er ridder. Siden han selv da må være eneste ridder, må alle andre lyge. Men det er umulig siden Arthur i såfall ville fortalt sannheten, så Kermit må også være væpner.

Nå har vi funnet tre væpnere, hvilket betyr at Arthur forteller sannheten, så <u>Arthur han må være ridder</u>.

Nå står vi igjen med to personer, Bottolf og Alexander. Hvis vi antar at Bottolf er ridder må Alex også være det for å få tre riddere, men det er umulig siden Alex og Bottolf motsier hverandre, så <u>Bottolf må være væpner</u>. Til slutt ser vi at hvis vi antar at Alex er ridder, stemmer utsagnet hans. Dette er og eneste mulighet, siden hvis Alex hadde vært væpner måtte enten Kermit, Harry eller Bottolf vært riddere, og det vet vi jo at ikke er tilfellet. <u>Altså må Alexander være ridder</u>.

<u>OPPGAVE 1</u> X 25/11 - 97

a) Utsagnet for bryternettverket:

$$[p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \wedge [(p \wedge r \wedge t) \vee t]$$

b)

Skal finne et ekvivalent bryternettverk med bare to brytere.

Dette kan vi gjøre ved å forenkle nettverkets logiske utsagn:

$$[p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \wedge [(p \wedge r \wedge t) \vee t]$$

$$\overset{\text{Absorbsjons-lovene}}{\iff} [p \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \wedge [(p \wedge r \wedge t) \vee t]$$

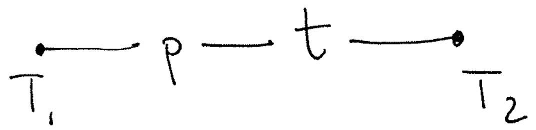
$$\overset{\text{Assosiative lover}}{\iff} [p \vee (p \wedge (q \wedge \neg r))] \wedge [((p \wedge r) \wedge t) \vee t]$$

$$\overset{\text{Absorbsjons-lovene}}{\iff} [p] \wedge [((p \wedge r) \wedge t) \vee t]$$

$$\iff p \wedge [t \vee (t \wedge (p \wedge r))]$$

$$\overset{\text{Absorbsjons-lovene}}{\iff} p \wedge t$$

Så et enklere, ekvivalent nettverk er



Dette kan vi faktisk også se rett av tegningen - for å komme oss gjennom første del av nettverket, ser vi at vi må ha p, samtidig som p alene er nok. Altså kan denne delen forenkles til bare p. Tilsvarende argument viser at den andre delen kan forenkles til bare t.

OPPGAVE 6

Gitt mengden M definert ved

i) $3 \in M$

ii) $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$

Skal vise at M er lik mengden av alle positive heltall delelig med 3.

Velger å kalle mengden av alle positive heltall delelig med 3 for N, dvs. $N = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
$= \{3k \mid k = 1, 2, 3, \dots\}$

Viser at $M = N$ ved å vise $M \subseteq N$ og $N \subseteq M$.

<u>$M \subseteq N$</u>:

Viser dette ved induksjon. La den induktive påstanden være

$P(n): \quad 3n \in M \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$

Viser først at $P(1)$ er sann:

$P(1): \quad 3 \cdot 1 = 3 \in M \rightarrow$ sant pga. i) i definisjonen av M.

Antar $P(k)$, dvs. at $3k \in M$. Undersøker så $P(k+1)$:

$$P(k+1): \quad 3(k+1) \overset{?}{\in} M$$

$$3(k+1) = 3k + 3 \cdot 1 = 3k + 3$$

$3k$ er i M pga. antakelsen, 3 er i M pr. def.

$\Rightarrow$ siden ii) i def. av M sier at summen av to elementer i M er i M, ser vi at $3(k+1) \in M$ og $P(k+1)$ er derfor sann.

Altså kan vi konkludere med at $M \subseteq N$ ved matematisk induksjon

<u>$N \subseteq M$:</u>

Her holder det å vise at N oppfyller i) og ii) i definisjonen av M, da følger det at alle elementer i M må være i N.

i): $3 = 3 \cdot 1 \in N$ pr. def.

ii): La $x, y \in N$. Da vet vi at det finnes positive heltall k og l slik at $x = 3k$ og $y = 3l$ pga. definisjonen av N.

$\Rightarrow x + y = 3k + 3l = 3(k+l) \in N$ fordi $k+l$ også er et positivt heltall $\Rightarrow$ o

Altså er $M \subseteq N$ og $N \subseteq M$, slik at $N = M$.

5.1.2

Gitt $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,5\}$

a) Skal finne 3 ikke-tomme relasjoner fra A til B. Vet at en relasjon fra A til B er en delmengde av $A \times B$, så tre relasjoner kan f.eks være

$R_1 = \{(2,2)\}$ → likhetsrelasjonen

$R_2 = A \times B$

$R_3 = \{(1,5),(2,5),(3,5),(1,4)\}$

b) Ikke-tomme relasjoner på A er delmengder av $A \times A$, så vi har for. eks.:

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ → likhetsrelasjonen

$R_2 = A \times A$

$R_3 = \{(2,3)\}$

5.1.3

Samme A og B som i oppgaven over.

a) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 3 = \underline{\underline{9}}$

b) # relasjoner fra A til B: $2^{|A||B|} = 2^{3 \cdot 3} = \underline{\underline{2^9}}$

c) # relasjoner på A: $2^{|A||A|} = 2^{3 \cdot 3} = \underline{\underline{2^9}}$

d) # relasjoner fra A til B som inneholder (1,2) og (1,5):

Siden $A \times B$ inneholder 9 elementer og vi i alle relasjonene skal ha med to av dem, ser vi at det står igjen 7 elementer vi kan velge fritt i. Altså har vi to muligheter for hvert av de 7 gjenværende elementene, og vi får da ved produktregelen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 \text{ muligheter}$$

Altså er det 2^7 relasjoner fra A til B som inneholder (1,2) og (1,5).

e) # relasjoner som inneholder nøyaktig 5 ordnede par:

Her har vi 9 å velge i, og siden vi skal velge uten hensyn til rekkefølge og uten tilbakelegging, får vi totalt $\binom{9}{5}$ mulige relasjoner.

f) # relasjoner som inneholder minst 7 ordnede par:

På samme måte som i e) må vi her velge enten 7, 8 eller 9 par, så vi får $\binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}$ mulige relasjoner.

5.1.4

Skal finne ut for hvilke mengder A og B
$A \times B = B \times A$.

Siden $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
og $B \times A = \{(b,a) \mid b \in B, a \in A\}$

ser vi at $A \times B = B \times A$ hvis $A = B$.
Dette er imidlertid ikke eneste mulighet, siden vi vet at $C \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times C$ for alle C, slik at $A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ og $A \neq \emptyset$, $B = \emptyset$ også er en mulighet (hvis $A = B = \emptyset$, dekkes dette av tilfellet over).

Altså er $A \times B = B \times A$ hvis $A = B$ eller hvis $A \neq B$ men enten A eller B er lik $\emptyset$.

5.2.1

Skal avgjøre om de gitte relasjonene er funksjoner eller ikke, og, hvis de er funksjoner, angi deres verdimengde (range).

a) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z},\ y = x^2+7\}$

Her ser vi at alle $x \in \mathbb{Z}$ vil gi en, og bare en $y \in \mathbb{Z}$ (fordi $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2+7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$).
Altså er dette en funksjon, og verdimengden blir

$\{7, 8, 11, 16, \dots\}$ (bare sett inn forskjellige x-verdier)

b) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\ \ y^2 = x\}$

Her ser vi at både $(4,2)$ og $(4,-2)$ er i relasjonen, samt at -1 ikke står først i noe tallpar, slik at dette ikke kan være noen funksjon.

c) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ y = 3x+1\}$

Igjen ser vi at alle x gir nøyaktig en y $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x+1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R})$, slik at dette er en funksjon. Verdimengden blir hele $\mathbb{R}$.

d) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q}, x^2+y^2=1\}$

Her ser vi at både $(0,1)$ og $(0,-1)$ er med, slik at dette ikke kan være en funksjon. Dette kan vi også se ut fra at $x > 1$ gir at det ikke finnes noen $y \in \mathbb{Q}$ som oppfyller relasjonen.

e) $\mathcal{R}$ fra A til B der $|A| = 5$, $|B| = 6$ og $|\mathcal{R}| = 6$.

Dette kan ikke være en funksjon siden

$\mathcal{R}$ er funksjon $\iff$ alle $x \in A$ har nøyaktig en $y \in B$

$$\Downarrow$$

$$|\mathcal{R}| = |A|$$

Siden $|\mathcal{R}| > |A|$, ser vi at minst et element i A må være med to ganger i relasjonen, noe som ikke er tillatt hvis $\mathcal{R}$ skal være en funksjon.

5.2.2

Skal bestemme om $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ definerer en funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eller $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Siden $f(\pm\sqrt{2})$ ikke eksisterer men $f(x)$ er entydig definert for alle andre x, ser vi at f ikke er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, men oppfyller kravene til å være en funksjon fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{R}$.

Til slutt noen generelle kommentarer mhp. neste øving og eksamen:

- Begrunn svarene! I dette kurset er begrunnelsene vel så viktig som svaret. Gode begrunnelser viser dessuten god forståelse, noe som vil bidra til å gi et godt helhetsinntrykk av besvarelsen. I tillegg slipper man å miste mye poeng pga. slurvefeil underveis i resonnementet.
- Er du usikker på tolkningen av en oppgave, så start besvarelsen med å si hvordan du tolker den.
- Dette er et fag som krever jevnt arbeid for å få et godt resultat, det er for seint å begynne uka før eksamen.
- Spør spør spør! Faglærer og stud.ass.'er er der for å brukes!

AB