1 Klinkekuler

Denne oppgaven ble gitt til en kamerat under et jobbintervju hos google som en test av søkerens evne til logiske resonnementer.

Du står foran et hus med 100 etasjer og får utdelt to og bare to identiske klinkekuler. Vi skal finne ut hva som er den laveste etasje der en klinkekule knuses hvis den slippes ut av vinduet. Dette er selvfølgelig lett hvis man har ubegrenset antall forsøk da man bare kan starte nedenfra og slippe kulen fra første etasje. Hvis den ikke knuses henter man den igjen og prøver fra andre etasje o.s.v. Første etasje der kulen knuses er svaret. Denne strategien vil kreve kanskje 100 forsøk, og dessuten gjør man ikke bruk av at der er to kuler til rådighet.

Spørsmålet blir mer vrient hvis vi stiller det slik: Hva er det minste antall forsøk som trengs for alltid å finne denne kritiske etasjen der kulene knuses? Så spørsmålet blir: finn dette minste antall forsøk og vis at svaret ditt er rett.

(Vink: Det kan være nyttig å kjenne til velordningsprinsippet: *Enhver ikke-tom mengde av naturlige tall inneholder et minste tall.*)

Frist: Mandag 21. januar på forelesning

2 Ikke-tellbarhet av $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Vis at potensmengden (powerset) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ er ikke-tellbar.

Frist mandag den 18. februar

3 Et øy-mysterium

På en ensom øy i miraklenes hav bor et lykkelig folkeferd. Øya er så liten at alle kjenner alle, og med ett unntak er alle øyboerne usedvanlig intelligente og rasjonelle. Unntaket er at det blir ansett som en stor skam å ha blå øyne. Dersom en av øyboerne oppdager han eller hun har blå øyne vil han flykte samme dag ved midnat. Heldigvis er det ingen speil på øya og alle er for høflige til å nbevne andres øyenfarge med et eneste ord. En dag får øya besøk av en misjonær. Da han skal til å forlate øya, forteller misjonæren alle på øya at han synes det er rart der i et så lite samfund finns både brune og blå øyne. Den 43. natten etter dette flykter mange øyboere... Hvor mange hadde blå øyne?

Frist mandag den 18. februar

4 induksjon

Vis at syv deler $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

5 induksjon

Vis at

$$C(2n, n) < \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$$

for alle $n \geq 2$.