Hall of fame løsninger

Google-oppgaven

Som formulert i oppgaveteksten finns det en strategi av lengde 100 som fører frem. Mengden av antall forsøk som er tilstrekkelig er derfor en ikke-tom delmengde av de naturlige tall $\mathbb{N}$, og har derfor et minste element n. For å finne n nå da vi vet den eksisterer ser en lett at vi umulig kan slippe første kule fra høyere enn n'te etasje da vi i så fall risikerer å bruke mer enn n forsøk. Knuses den derfra må vi starte fra første etasje med den andre og bevege oss oppover. Knuses den ikke kan vi ikke gå høyere enn etasje $n+(n-1)$. Knuses den derfra starter vi fra n'te etasje og går oppover og ender på høyst n forsøk. Knuses den ikke går vi til $n+(n-1)+(n-2)$'te etasje... o.s.v....

Minste tall som har $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 \geq 100$ er 14 som må være det riktige svaret.

Ikke-tellbarhet av $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Vi vet at $\mathbb{R}$ ikke er tellbar. (Dette kan vises ved et diagonalargument som vist på forelesning). Siden $\tan(\pi x + \frac{\pi}{2})$ avbilder $(0,1)$ *på* $\mathbb{R}$ er også $(0,1)$ ikke-tellbar. Men alle $x \in (0,1)$ har en binærekspansjon

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \qquad b_n = 0 \textit{ eller } b_n = 1$$

Derfor svarer alle $x \in (0,1)$ til en følge av 0'er og 1'ere (nemlig b_n'ene). Men da svarer alle $x \in (0,1)$ til en mengde i $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ta bare $n \in X$ hvis b_n i binærekspansjonen til x er lik en. Dette viser at $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ inneholder minst like mange element som $(0,1)$ og dermed $\mathbb{R}$.

Mirakeløya

Det er essensielt at misjonæren gir opplysningen sin i alles påhør. Det han forteller er *ikke* at det finns begge øyenfarger - det visste alle allerede fra før. Det han forteller er at alle vet at alle andre vet det finns begge farger. Med dette på plass går argumentet som følger:

Vi tar som hypotesen $S(n)$: Alle øyboere vet at alle på øya er gitt nok informasjon til å kunne resonnere seg frem til at hvis en øyboer ser presis $n-1$ andre øyboere med blå øyne som ikke drar den $(n-1)$'te natten da har han selv blå øyne...

Hvis der er 1 øyboer med blå øyne vil han se bare brune øyne på de andre. Når han vet at det finns begge øyefarger må han skjønne at han selv har blå øyne og drar derfor fra øya den første natta. Videre er alle andre i stand til å forstå hvorfor han gjorde som han gjorde. Dette etablerer $S(1)$.

Antar vi at $S(n)$ er sann ser vi på tilfellet at der er $n+1$ med blå øyne. Nummer $n+1$ av de med blå øyne ser n andre med blå øyne som potensielt, (fra nummer $n+1$ sitt ståsted), ser presis $n-1$ personer med blå øyne. Gitt sannheten av $S(n)$ vet nummer $n+1$ at når nummer n ikke drar den n'te natten kan nummer n ikke bare ha sett $n-1$ med blå øyne og nummer $n+1$ vet at han selv har blå øyne. Alle $n+1$ kan utføre dette resonnement og $S(n+1)$ er vist.

Oppgaven er litt fiffig for hvis man bruker den opplagte induksjonshypotesen $P(n)$ at hvis de er n personer med blå øyne drar n øyboere den n'te natten, da blir argumentasjonen veldig kryptisk, og man ender opp i noe som minner om sirkulær argumentasjon - det vil si at man anvender det man vil vise til å vise det. Argumentet over mener jeg er rensket for slike sykdommer.

Bemerk at $S(n) \Rightarrow P(n)$ men *ikke* $P(n) \Rightarrow S(n)$.