

8. oppgavesett, MA0301 vår 2008

Oppgave 1:

Anta negasjonen av konklusjonen som premiss. Da er $p \wedge \neg s$ sann. Siden $p \rightarrow q$ må q i så fall og være sann. Men da er $(r \wedge q) \rightarrow s$ sann og dermed er s sann. Dette strider mot sannheten av $\neg s$ og vi er ferdig.

Oppgave 2:

Oppgave 3:

Dette vises ved induksjon på n . For $n = 2$ er $2^2 = 4 < 6 = C(4, 2) < 16 = 4^2$. Antar vi sannheten av

$$2^n < C(2n, n) < 4^n$$

får vi:

$$\begin{aligned} C(2(n+1), n+1) &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \\ &= C(2n, n) \frac{(2n+1)2(n+1)}{(n+1)^2} \\ &= C(2n, n) 2 \frac{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

Den siste brøken er større enn 1 og mindre enn 2 og det er presis det vi ønsker oss!!!

Oppgave 4:

Dette er feil. Ta $f(x) = x^2$ med $A = (0, 1)$ og $B = (-1, 0)$. Da er $f(A \cap B) = \emptyset$ i motsetning til $f(A) \cap f(B) = (0, 1)$.

Oppgave 5:

Dette er riktig. Vi nøyer oss med å vise den ene inklusjonen og overlater den andre til leseren.

La $y \in f(A \cup B)$. Da eksisterer det en $x \in A \cup B$ med $f(x) = y$. Men $x \in A$ eller $x \in B$ så $f(x) \in f(A)$ eller $f(x) \in f(B)$ og under alle omstendigheter er $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Dette viser at $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.