Løsning til øving 5, MA0301, v2008

Oppgave 1

Vi tester et par verdier av n:

$$\begin{aligned} n=1: &\quad \frac{1}{2} \\ n=2: &\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3} \\ n=3: &\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ut fra dette postulerer vi

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$P(1)$ har vi ordnet og antar vi $P(k)$ er sann får vi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Og vi er ferdig. Svaret på oppgaven blir da $\frac{627}{628}$

Oppgave 2

$$S(n): \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$$

$S(1)$ er triviell, så vi antar $S(k)$ får vi:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}} = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)} \cap \overline{A}_{k+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A}_i\right) \cap \overline{A}_{k+1} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A}_i$$

Og igjen er vi ferdig.

Oppgave 3

Fibonaccitallene er gitt rekursivt ved:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad og \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Derfor er opplagt

$$F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$$

Vi antar

$$\sum_{i=1}^{k} F_k = F_{k+2} - 1$$

og ser på:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

Ferdig.

Oppgave 4

$$S(n): \quad |x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Hintet i oppgaven tar seg av starten av induksjonen, og vi antar derfor $S(k)$ og ser på $S(k+1)$:

$$|x_1+\cdots+x_{k+1}| = |(x_1+\cdots+x_k)+x_{k+1}| \leq |x_1+\cdots+x_k|+|x_{k+1}| \leq |x_1|+\cdots+|x_{k+1}|$$

Ferdig.

Oppgave 5

En kan ikke slutte at $P(k+1)$ er sann fordi $P(k+1)$ er usann.