LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1101
13.12.07

Oppgave 1

a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln(1+\sin 2x)} \text{ "}=\frac{0}{0}\text{" } = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}} = \frac{-1}{\frac{-2}{1}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x} \text{ "}=\frac{0}{0}\text{" } = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3} \text{ "}=\frac{0}{0}\text{" } = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} \text{ "}=\frac{0}{0}\text{" } = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{6x} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 2

a) $$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \underline{\underline{\ln(x^2-2x+2) - 2\arctan(x-1) + C}}$$

b) $$\frac{1}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} = \frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(C-2A)x+2A}{x(x^2-2x+2)}$$

Sikkert oppfylt når $\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ C-2A=0 \\ 2A=1 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=1}}$

c) $$\int \frac{\cot\theta\, d\theta}{\sin^2\theta - 2\sin\theta + 2} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta(\sin^2\theta - 2\sin\theta+2)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=\sin\theta \\ dx=\cos\theta\, d\theta \end{array}} \quad \overset{\uparrow}{=} \int \frac{dx}{x(x^2-2x+2)} \underset{b)}{=} \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$\underset{a)}{=} \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + C$$

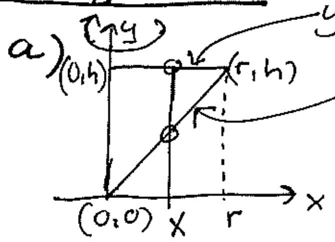
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\theta \; d\theta}{\sin^2\theta - 2\sin\theta + 2} = \left[\frac{1}{4}\ln\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - 2\sin\theta + 2} + \frac{1}{2}\arctan(\sin\theta - 1)\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{1/4}{5/4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 5}}$$

Oppgave 3

a)



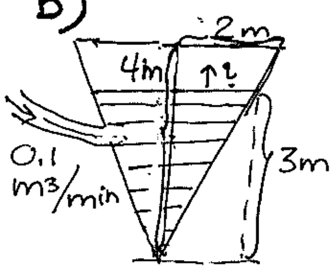
$y = \frac{h}{r}x$ Bruker sylindriske skall og får

$$V = \int_0^r 2\pi x\left(h - \frac{h}{r}x\right)dx = \left[\pi h x^2 - \frac{2\pi h}{3r}x^3\right]_{x=0}^{x=r} = \underline{\underline{\frac{\pi r^2 h}{3}}}$$

Alternativt f.eks. skivemetoden mhp y-aksen:

$$\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}y\right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{h^2}y^3\Big]_{y=0}^{y=h} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 h}}$$

b)



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}, \quad h = 2r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}h$$

$$V(t) = \frac{\pi}{12}h(t)^3$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{4}h^2(t)\cdot h'(t)$$

$V'(t_0) = 0.1\ m^3/min$, $h(t_0) = 3\,m$. Altså

$$h'(t_0) = \frac{4\;V'(t_0)}{\pi h^2(t_0)} = \frac{4\cdot 0.1}{\pi\cdot 9} = \underline{\underline{\frac{2}{45\pi}}} \;\; (m/min)$$

Oppgave 4

Karakteristisk ligning $r^2 - 5r - 6 = 0$

Røtter $r = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 6}}{2} = \begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$

Generell løsning av diffligning. $\underline{y = Ce^{6x} + De^{-x}} \Rightarrow$

Setter inn betingelsene: $\underline{y' = 6Ce^{6x} - De^{-x}}$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= y(0) = C + D \\ 4 &= y'(0) = 6C - D \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 7C &= 4 \\ D &= -C \end{aligned} \Leftrightarrow C = \frac{4}{7}, \; D = -\frac{4}{7}$$

Altså $\underline{\underline{y = \frac{4}{7}e^{6x} - \frac{4}{7}e^{-x}}}$

Oppgave 5

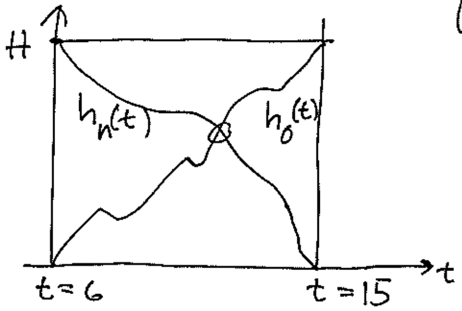
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sekantsetn.} \\ \text{(middelverdisetn.)}}}{=} \cos c \quad \text{for passende } \underline{c \in (0,x)}$$

cosinus er avtagende på $(0,\pi)$, så $\underline{\cos c > \cos x}$

Tilsammen $\underline{\frac{\sin x}{x} > \cos x}$ (for x vilk. i $(0,\pi)$) $\square$

<u>Alternativt</u> studerer vi f.eks: $f(x) = \sin x - x\cos x > 0$ for $x \in (0,\pi)$ ved vanlig drøftig: f er kont. på $[0,\pi)$, $f(0) = 0$ og $\underline{f'(x)} = (\cos x - \cos x) + x\sin x \underline{> 0}$ for $x \in (0,\pi)$. Vi har at $f(x)$ er strengt voksende på $[0,\pi)$, og spesielt er $f(x) > f(0)$ når $x > 0$. $\square$

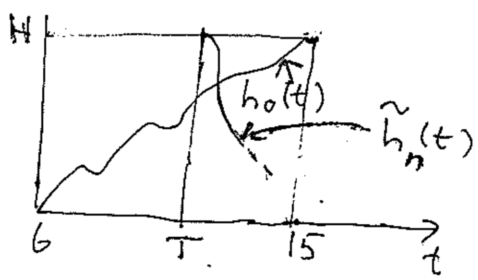
Oppgave 6



La $h_o(t)$ betegne høyden ved tiden t på <u>oppturen</u> og $h_n(t)$ betegne høyden ved tiden t på <u>nedturen</u>.
Ser vi på $\underline{d(t) = h_o(t) - h_n(t)}$ har vi da en kontinuerlig funksjon der $\underline{d(6)} = 0 - H \underline{< 0}$, $\underline{d(15)} = H - 0 \underline{> 0}$.
Altså må det i flg. skjæringssetningen finnes minst en t_0, $6 < t_0 < 15$, slik at $d(t_0) = 0 \Leftrightarrow h_o(t_0) = h_n(t_0)$. $\square$

(Starter nedstigningen etter klokka 15, må vi anta at hun er på toppen klokka 15.)

Ser på situasjonen der hun starter kl. T, $6 < T < 15$,



$$g : [T, 15] \to \mathbb{R}$$
$$g(t) = h_o(t) - \tilde{h}_n(t)$$
$$g(T) = h_o(T) - H \leq 0$$
$$g(15) = h_o(15) - \tilde{h}_n(15) = H - \tilde{h}_n(15) \geq 0$$

Igjen må det finnes $t = t_1$ slik at $g(t_1) = 0$ eller $h_o(t_1) = \tilde{h}_n(t)$. $\square$