



Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag, mobil 48301988

## Eksamen i MA6101 Grunnkurs i analyse I

Bokmål

Onsdag 13. desember 2006

Tid: 09.00 - 13:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

Vedlagt formelark for MA1101

Sensur: Fredag 12. januar 2007

Ved vurderingen teller i utgangspunktet hvert bokstavpunkt og oppgavene 4, 5, 6 - i alt 10 punkt - likt. **Husk at alle svar skal begrunnes!**

### Oppgave 1 Finn grenseverdiene

a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln(1 + \sin 2x)},$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3}.$$

### Oppgave 2

a) Regn ut integralet

$$\int \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

b) Finn konstanter  $A, B, C$  slik at

$$\frac{1}{x(x^2 - 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}.$$

c) Regn ut integralet

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot \theta}{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 2} d\theta.$$

### Oppgave 3

- a) Volumet av en kjegle med høyde  $h$  og radius  $r$  er  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ . Utled denne formelen ved å rotere trekanten med hjørner i  $(0, 0)$ ,  $(r, h)$  og  $(0, h)$  om  $y$ -aksen.
- b) En kjegleformet tank står med spissen ned. Høyden til tanken er 4 meter og radien på toppen er 2 meter. Vann pumpes inn i tanken med en konstant fart av  $0,1 \text{ m}^3$  per minutt. Hvor fort øker vannstanden i det øyeblikket vannet står 3 meter høyt?

**Oppgave 4** Finn funksjonen som tilfredsstiller differensialligningen og begynnelsesbetingelsene

$$y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

**Oppgave 5** Vis at

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x, \quad x \in (0, \pi).$$

### Oppgave 6

En fjellklatrer starter fra bakken kl. 6 og når toppen kl. 15. Neste dag starter hun nedklatringen kl. 6 og er nede kl. 15. Vis at det finnes et klokkeslett der hun er like høyt oppe begge dager. Gjelder konklusjonen også dersom nedstigningen starter på et senere tidspunkt?

# FORMELARK FOR MA6101

## Ekspontialfunksjoner

**Derivasjon:**  $(a^x)' = a^x \ln a$  spesielt  $(e^x)' = e^x$   
**Identiteter:**  $a^x a^y = a^{x+y}$   $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$   $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$   $(a^x)^y = a^{xy}$

## Logaritmefunksjonen

**Derivasjon:**  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$   
**Identiteter:**  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$   $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$   $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$   
 $\ln(x^a) = a \ln x$  for  $x, y > 0$

## Trigonometriske funksjoner

**Derivasjon:**  $(\sin x)' = \cos x$   $(\cos x)' = -\sin x$   
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$   $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$   
**Identiteter:**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$   
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$   
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$   
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$   
 $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

$v$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

## Arcusfunksjoner

**Derivasjon;**  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

## Annenordens differensialligning

$$y'' + py' + qy = 0 :$$

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis } r_1 \neq r_2 \text{ r\o}tter \text{ i karakteristisk ligning} \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis } r \text{ dobbelrot i karakteristisk ligning} \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis kar. lign. } (r-a)^2 + b^2 = 0, b \neq 0 \end{cases}$$