

## Notat til seksjon 10.5

### Utledning av formlene uten bruk av komplekse tall

Vi skal studere løsningene til

$$(D) \quad y'' + py' + qy = 0$$

der  $p, q \in \mathbb{R}$ .

*Observér:* Dersom  $y_1, y_2$  er løsninger av (D), så er også  $Cy_1 + Dy_2$  løsninger av (D).  
(Se om nødvendig beviset øverst på s. 530 hos Lindstrøm.)

### Reelle eksponentialløsninger av (D)

Husk:  $y' + by = 0 \iff y = Ce^{-bx}$

Vi prøver derfor om  $y = e^{rx}$  kan være en løsning av (D). Innsatt får vi

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

eller den *karakteristiske ligning*

$$(K) \quad r^2 + pr + q = 0$$

Ser på tilfellene

$$(I) \quad p^2 - 4q > 0$$

(K) har løsninger  $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$  og  $y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$  er løsninger av (D).

$$(II) \quad p^2 - 4q = 0$$

(K) har dobbeltrot  $r = -\frac{p}{2}$  og  $y = Ce^{-\frac{p}{2}x}$  er løsninger av (D).

$$(III) \quad p^2 - 4q < 0$$

(K) har ingen reelle røtter.

### Alle løsninger i tilfellene (I) og (II)

Enhver løsning av  $y$  i (D) kan skrives som  $y = ue^{rx}$ ,  $u = ye^{-rx}$ , der vi lar  $r$  være en rot i (K). Men har denne faktoriseringen noe for seg?

Vi setter  $y = ue^{rx}$  inn i (D) og får

$$y'' + py' + qy = u'' + (2r + p)u' + r^2 + pr + q = 0$$

eller

$$(*) \quad u'' + (2r + p)u' = 0$$

da  $r^2 + pr + q = 0$ .

(II) Her er  $r = -\frac{p}{2}$  slik at (\*) blir

$$u'' = 0 \iff (u')' = 0 \iff u' = A \iff u = Ax + B$$

Altså er alle løsninger gitt ved

$$\underline{y = (Ax + B)e^{rx}, \text{ der } r = -\frac{p}{2}}$$

(I) La  $r = r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

$$u'' + (2r_1 + p)u' = 0$$

Her er  $2r_1 + p = \sqrt{p^2 - 4q} = r_1 - r_2$

$$(u')' + (r_1 - r_2)u' = 0 \iff u' = Ee^{(r_2 - r_1)x} \iff u = Fe^{(r_2 - r_1)x} + G$$

Altså er alle løsninger gitt ved

$$\underline{y = (Fe^{(r_2 - r_1)x} + G)e^{r_1x} = Fe^{r_2x} + Ge^{r_1x}}$$

### Løsningene i tilfellet (III)

Når  $p^2 - 4q < 0$  har vi ved å fullføre kvadratet i (K)

$$r^2 + pr + q = \left(r + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = 0$$

Det enkleste tilfellet av denne typen er (K)

$$r^2 + 1 = 0$$

svarende til (D)

$$y'' + y = 0$$

Her er det klart at  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  er løsninger. Mer generelt er  $y = \sin(bx)$ ,  $y = \cos(bx)$  løsninger av

$$(**) \quad y'' + b^2y = 0$$

med (K)  $r^2 + b^2 = 0$ ,  $b \neq 0$ .

Dermed er også  $y = A \sin(bx) + B \cos(bx)$  løsninger. Men utgjør disse alle? Det kan vises som før ved å sette  $y = u \sin x$  i (\*\*).

### Tilfellet $p \neq 0$ i (K)

(K) kan da skrives på formen

$$\left(r + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2$$

der  $b^2 = \frac{4q - p^2}{4} > 0$ .

Hvordan kan vi bli kvitt  $p$  i (D) og dermed i (K)? Innfører en ny variabel  $v$  gitt ved  $y = e^{ax}v$ . Innsatt i (D) får vi

$$y'' + py' + qy = [v'' + (2a + p)v' + (a^2 + pa + q)v] e^{ax} = 0$$

Med  $a = -\frac{p}{2}$  blir differensialligningen med den nye variabelen  $v$

$$v'' + b^2v = 0 \iff v = A \sin(bx) + B \cos(bx)$$

Siden  $y = e^{ax}v$  følger da

$$\underline{y = Ae^{ax} \sin(bx) + Be^{ax} \cos(bx)}$$

## Sluttresultat (også på formelarket)

$$y'' + py' + qy = 0 :$$

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1x} + De^{r_2x} & \text{hvis } r_1 \neq r_2 \text{ røtter i karakteristisk ligning} \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis } r \text{ dobbeltrot i karakteristisk ligning} \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis kar. lign. } (r - a)^2 + b^2 = 0, b \neq 0 \end{cases}$$

**Korollar** Dersom  $x_0, c, d \in \mathbb{R}$  er vilkårlige tall, så finnes det nøyaktig en løsning av  $y'' + py' + qy = 0$  slik at  $y(x_0) = c$ ,  $y'(x_0) = d$ .

(Får ved innsetting et system med to ligninger i  $c$  og  $d$ . Systemet har entydig bestemt løsning.)

## Eksempler

### Oppgave 10.5.2

a)  $y'' - 2y' + y = 0$

(K)  $r^2 - 2r + 1 = 0$ ;  $r = 1$  er dobbeltrot.

Fra tabell:  $\underline{y = Ce^x + Dxe^x}$

c)  $y'' + 16y = 0$

(K)  $r^2 + 16 = 0$  eller  $(r - 0)^2 + 4^2 = 0$ .

Fra tabell:  $\underline{y = Ce^{0x} \cos(4x) + De^{0x} \sin(4x) = C \cos(4x) + D \sin(4x)}$

### Oppgave 10.5.3

c)  $y'' - 4y' - y = 0$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = -1$

La oss først løse oppgaven med  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .

(K)  $r^2 - 4r - 1 = 0$ ;  $r = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$

Fra tabell

(L)  $y = Ce^{(2+\sqrt{5})x} + De^{(2-\sqrt{5})x}$

og

$$y' = (2 + \sqrt{5})Ce^{(2+\sqrt{5})x} + (2 - \sqrt{5})De^{(2-\sqrt{5})x}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) = 2 &\iff C + D = 2 \\ y'(0) = -1 &\iff (2 + \sqrt{5})C + (2 - \sqrt{5})D = -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C &= 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ D &= 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Tilbakesubstitusjon i (L) gir da

$$y = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2+\sqrt{5})x} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2-\sqrt{5})x}$$

---

Så tilbake til  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = -1$ .

Generell løsning kan også skrives som

$$(L_1) \quad y = Ae^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + Be^{(2-\sqrt{5})(x-1)}$$

Da vil vi som over finne at  $y(1) = 2$  og  $y'(1) = -1$  gir  $A = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$  og  $B = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Med disse verdiene innsatt i den generelle løsningen får vi

$$y = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)e^{(2-\sqrt{5})(x-1)}$$

---

(Ekstra: Prøv å løse oppgaven uten å bruke formen  $(L_1)$ .)