Faglig kontakt: Kari Hag (73 59 35 21, 48 30 19 88) **Studentnr.** ________________

Semesterprøve i MA6101 den 4.11.06
Tid: 90 min. Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

DEL I

Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål i del I. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. Det reelle tallet $\dfrac{(1+\sin\frac{\pi}{3})^2-\sqrt{3}}{2}$ er lik

☐ et irrasjonalt tall ☐ 0 ☐ 1 ☒ et rasjonalt tall $\neq 0, 1$

$$\frac{(1+\sin\frac{\pi}{3})^2-\sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}-\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

2. Vi skal bruke definisjonen av konvergens til å vise at følgen $\{a_n\}$ gitt ved $a_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{n}$ konvergerer mot 1. Så gitt vilkårlig $\varepsilon > 0$, hvor stor må N våre for at $|a_n - 1| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$?

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n-\sqrt{n}}{n} - 1\right| = \left|1 - \frac{\sqrt{n}}{n} - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2$$

☐ Større enn $\max\{1, \varepsilon/2\}$ ☐ Større enn $1/\sqrt{\varepsilon}$ ☐ Større enn $1/\varepsilon$ ☒ Større enn $1/\varepsilon^2$ $\underline{n > \frac{1}{\varepsilon^2}}$

3. I en likebeint trekant er de to like lange sidene 4 cm hver. Hva er det største arealet trekanten kan ha?

☐ $4\sqrt{3}$ ☒ 8 ☐ $8\sqrt{2}$ ☐ 16

4. Den deriverte til funksjonen $f(x) = x^2 \cot x$ er

☐ $2x\cot x$ ☐ $\dfrac{2x}{\cos^2 x}$ ☐ $\dfrac{-2x}{\sin^2 x}$ ☒ $\dfrac{x\sin 2x - x^2}{\sin^2 x}$

5. Hvilken ulikhet gjelder for alle $x > 0$?

☒ $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$ ☐ $\arctan x > x$ ☐ $\arctan x < \dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $\arctan x < \sin x$

6. Funksjonen $f(x) = x^3 + 2x + 1$ har en omvendt funksjon f^{-1}. Den deriverte $(f^{-1})'(1)$ er lik:

☐ 5 ☐ 1/5 ☒ 1/2 ☐ 2

7. Den deriverte til funksjonen $F(x) = \displaystyle\int_0^{3x} e^{t^2}\,dt$, er

☐ e^{9x^2} ☐ udefinert da integralet ikke lar seg regne ut ☒ $3e^{9x^2}$ ☐ e^{x^2}

8. Området begrenset av x-aksen og grafen til $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$, roteres om y-aksen. Hva blir volumet av omdreiningslegemet?

☐ π ☐ $\frac{9\pi}{4}$ ☐ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ☒ 2π

Del II

Her skal du begrunne svaret ditt, og ta med alle nødvendige mellomregninger.

9. For hvert naturlig tall n er P_n utsagnet

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 < n^4.$$

Vis at dersom P_k er sann for et naturlig tall k, så er P_{k+1} også sann. Er P_n sann for alle n?

$\underline{P_k \Rightarrow P_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})}$:

Vet: $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 < k^4 + (k+1)^3$

Å vise: $k^4 + (k+1)^3 \leq (k+1)^4$

$\Leftrightarrow \cancel{k^4} + k^3 + 3k^2 + 3k + \cancel{1} \leq \cancel{k^4} + 4k^3 + 6k^2 + 4k + \cancel{1}$ OK! $\square$

<u>P_1 er ikke sann</u> da $1^3 < 1^3$ ikke holder. <u>P_2 sann</u> da $1 + 2^3 < 2^4$.

<u>P_n er ved induksjon sann for $n \geq 2$.</u>

10. La funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Er f kontinuerlig og deriverbar for alle x?

f er kontinuerlig for $x \neq 0$ ut fra generell teori.

Videre er $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (\lim x^2 = 0,\ |\sin \frac{1}{x}| \leq 1)$
$= f(0)$

slik at f også er kontinuerlig for $x = 0$.

f er deriverbar for $x \neq 0$, igjen ut fra generell teori.

Videre er $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$.

ɔ: $f'(0) = 0$.

Altså er f deriverbar for alle x.

<u>Bemerker</u>

1. Nok å vise at f er deriverbar for alle x! (Da følger at f er kontinuerlig for alle x.)

2. $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2} \cos \frac{1}{x} = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{ingen grense når } x \to 0}$

$\lim_{x \to 0} f'(x)$ eksisterer ikke.

f' er <u>ikke</u> kontinuerlig for $x = 0$.