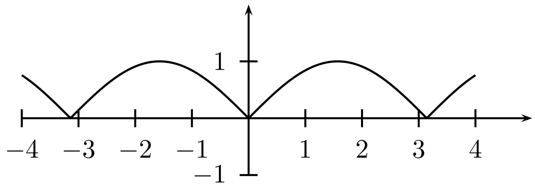
Fasit – “snublegruppe” 1. november

Denne fasiten omhandler alle oppgaver som ikke står i fasit i Tom Lindstrøms “Kalkulus” eller i Klara Hvebergs hefte (`http://folk.uio.no/lindstro/fasit06.pdf`). Heftet kan også kjøpes på instituttkontoret i 7. etasje i Sentralbygg 2.

Skulle du finne feil, er det fint om du tar kontakt på `johanste@stud.ntnu.no`, så skal jeg rette dem opp.

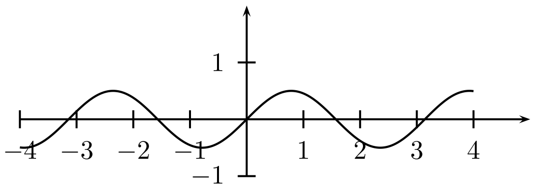
Elementære funksjoner

E.1 Skisser grafen til funksjonen.

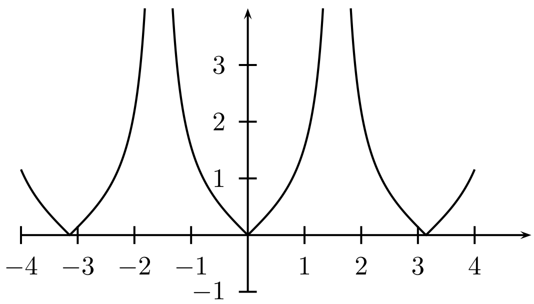


a) $f(x) = |\sin x|$
Denne trenger ingen forklaring.

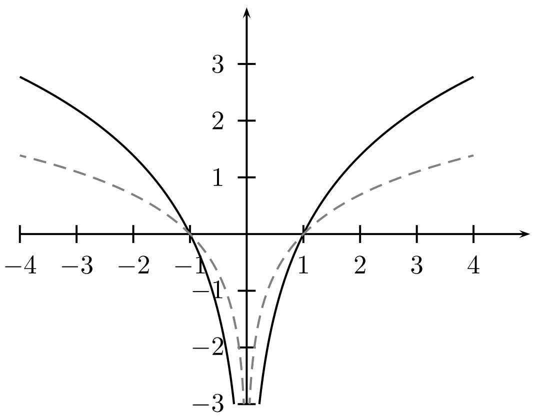
b) $f(x) = \sin x \cos x$
Denne funksjonen er i utgangspunktet vanskelig å tegne, så her er det en stor fordel om man kan skrive den om litt. Vi vet at $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, så $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Dette er en vanlig sinuskurve med halv amplitude, og halv periode. (Denne funksjonen har periode π.)



c) $f(x) = |\tan x|$
Som i oppgave a – denne trenger ingen forklaring.



d) $f(x) = \ln x^2$
Legg merke til at denne funksjonen er definert for alle $x \neq 0$. (Siden negative tall bli positive når de er kvadrert, og $\ln x$ er definert for alle $x > 0$.) For å effektivt kunne skissere denne, skriver vi om, og får $f(x) = 2\ln|x|$. I skissen er den stiplede linjen $\ln|x|$.



E.2 Løs ligningen.

a) $4^{2x+1} = 18^{x-1}$

Vi tar logaritmen på begge sider, og benytter oss av reglene som sier $\log x^y = y \log x$ og $\log x \pm \log y = \log xy^{\pm 1}$:

$$\begin{aligned}(2x+1)\log 4 &= (x-1)\log 18 \\ 2x\log 4 + \log 4 &= x\log 18 - \log 18 \\ \log 4 + \log 18 &= x\left(\log 18 - \log 4^2\right) \\ x &= \frac{\log 18 + \log 4}{\log 18 - \log 4^2}\end{aligned}$$

Herfra står man ganske fritt til å velge hvilken form man vil ha svaret på. Én måte å gjøre det på er ved å legge merke til at $18 = 2 \cdot 3^2$, og derfor har vi at $\log 18 = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2\log 3$.

$$x = \frac{\log 18 + \log 4}{\log 18 - \log 4^2} = \frac{\log 2 + 2\log 3 + 2\log 2}{\log 2 + 2\log 3 - 4\log 2} = \frac{2\log 3 + 3\log 2}{2\log 3 - 3\log 2}$$

b) $\ln x + \ln 2x = 3$

Vi vet at $e^{\ln x} = x$, så vi har:

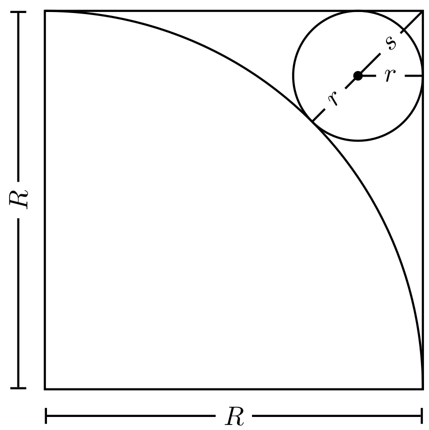
$$e^3 = e^{\ln x + \ln 2x} = e^{\ln x} e^{\ln 2x} = x \cdot 2x = 2x^2$$

Ved å dele på 2 og ta kvadratrot på begge sider får vi:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3}{2}}$$

Legg merke til at vi ikke får en negativ løsning her, men det er ikke så veldig rart, siden $\ln x$ kun er definert for positive x.

E.3 En sirkel med radius R er omskrevet av et kvadrat. Hva er radien r på de største sirklene du kan få plass til i hjørnene på kvadratet uten å skjære den opprinnelige sirkelen? (Tegn tegning!)



Skissen er av fjerdedelen øverst til høyre.

Vi vil finne r. Fra Pythagoras' ser vi at $R + r + s = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$. Vi finner s på samme måte; $s = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$.

Setter inn for s og løser for r:

$$\begin{aligned}R + r + s &= \sqrt{2}R \\ r + \sqrt{2}r &= \sqrt{2}R - R \\ r &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}R\end{aligned}$$

Kapittel 1

1.1 Fullfør summen.

a) $\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9}\cdots$
Vi ser på summasjonsgrensene at $k = n-1$. Ved å sette dette inn i summen får vi:

$$\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n-1=0}^{n-1=8}(2(n-1)+3) = \sum_{n=1}^{9}(2n+1)$$

b) $\sum_{n=0}^{10} x^n y^{1-n} = \sum_{n=1}^{11}\cdots$
Vi oppnår det samme her om vi bytter n med $n-1$:

$$\sum_{n=0}^{10} x^n y^{1-n} = \sum_{n=1}^{11} x^{n-1} y^{1-(n-1)} = \sum_{n=1}^{11} x^{n-1} y^{2-n}$$

1.2 Sett på summasjonsgrenser.

a) $\sum_{n=1}^{6}(n-1)a^n = \sum ma^{m+1}$

$$(n-1)a^n = ma^{m+1} \iff n-1 = m$$

Og siden summasjonsgrensene går fra $n = 1$ til $n = 6$ eller ekvivalent fra $m = n-1 = 0$ til $m = n-1 = 5$, får vi:

$$\sum_{n=1}^{6}(n-1)a^n = \sum_{m=0}^{5} ma^{m+1}$$

b) $\sum_{n=0}^{20} 3^{n+4} = \sum 81\cdot 3^n$
Dette er egentlig et lurespørsmål. Legg merke til at $3^{n+4} = 3^4\cdot 3^n = 81\cdot 3^n$, så grensene er de samme!

$$\sum_{n=0}^{20} 3^{n+4} = \sum_{n=0}^{20} 81\cdot 3^n$$

1.3 Vis ved hjelp av induksjon at $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2$ (Hint: Kjenner du igjen summen $1+2+\cdots+n$?)
Vi vet at $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Vi vil derfor vise at

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1}$$

Vi viser at (1) holder for $n = 1$:

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$$

Vi *antar* at (1) holder for $n = k$, så induksjonshypotesen (IH) sier at:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \tag{2}$$

Vi har nå vist at (1) holder for $n = 1$, og vi har antatt at den holder for $n = k$. Så om vi nå kan vise at den holder for $n = k+1$, følger det at formelen holder for alle naturlige tall.

Vi benytter induksjonshypotesen (2), og manipulerer uttrykket for å komme fram til ønsket resultat:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&\overset{\text{IH}}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Dette er samme resultat som vi hadde fått om vi hadde satt $n = k + 1$ inn i (1), og vi har vist det som skulle vises ved induksjon. $\square$

1.5 Løs ligningen $2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 12x = 0$. (Hint: $x = 0$ og $x = 1$ er to av løsningene.) Siden $x = 0$ og $x = 1$ er løsninger, betyr det at polynomet er delelig på $x(x-1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 12x}{x(x-1)} &= \frac{2x^3 - 7x^2 - 7x + 12}{x-1} \\
&= \frac{2x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 5x - 12x + 12}{x-1} \\
&= \frac{2x^3 - 2x^2}{x-1} - \frac{5x^2 - 5x}{x-1} - \frac{12x - 12}{x-1} \\
&= 2x^2 - 5x - 12 \\
&= (x-4)(2x+3)
\end{aligned}$$

Så $2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-1)(x-4)(2x+3)$ og har løsninger $x = \left\{0, 1, 4, -\frac{3}{2}\right\}$.