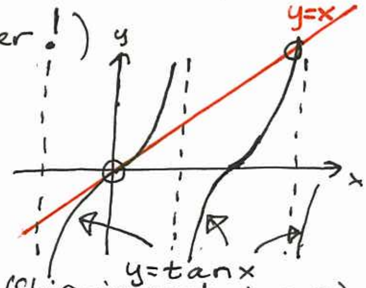
LØSNINGER UTVALGTE OPPGAVER ØVING 5

Oppg 6.2.4. Vi skal vise at ligningen $x = \tan x$ har nøyaktig en løsning i hvert av intervallene $((n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. (Med den kjennskap vi har til $\tan x$ er dette opplagt, men nå skal vi altså vise det ved en metode som kan være nyttig i mange sammenhenger!)



Vi studerer $d(x) = \tan x - x$, $(n-\frac{1}{2})\pi < x < (n+\frac{1}{2})\pi$.

Vi har $\lim_{x \to (n-\frac{1}{2})\pi^+} d(x) = -\infty$, $\lim_{x \to (n+\frac{1}{2})\pi^-} d(x) = +\infty$

i) slik at det finnes minst ett nullpunkt (Skjæringssetningen) for d i intervallet $I = ((n-\frac{1}{2})\pi < x < (n+\frac{1}{2})\pi)$. – Her er d kont. Videre er $d'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$; $d'(x) = 0$ bare når $x = n\pi$. Altså er d strengt voksende i $((n-\frac{1}{2})\pi, n\pi]$ og i $[n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ og dermed i hele intervallet! (Bruk definisjonen av strengt voksende.) Dette betyr at

ii) d har høyst ett nullpunkt i I. Konklusjon i sum: $d(x) = \tan x - x = 0 \Leftrightarrow x = \tan x$ har nøyaktig én løsning i I.

Oppg 6.2.6. Kravene i Rolles setning er foruten $f(-1) = f(1)$, om den skal anvendes på f over intervallet $[-1, 1]$, at f er kontinuerlig i $[-1, 1]$ og deriverbar i det åpne intervallet $(-1, 1)$. Det siste er ikke oppfylt her: f er ikke deriverbar i 0. („Ett punkt er altså nok til å velte konklusjonen!")

Oppg. 6.2.11 (Slike oppgaver vil etter hvert få oss til å tenke MVS!)

a) For $x = y$ gjelder likhet opplagt. Så se på $x < y$.
Middelverdisetningen på $f(t) = \sin t$ på intervallet $[x, y]$ gir

$$\left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \right) \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos c, \; c \in (x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{|\sin y - \sin x|}{|y - x|} = |\cos c| \leq 1 \Rightarrow |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$$

$$\Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

Helt tilsv. følger ulikheten for $x > y$.

b) For $x = y$ gjelder likhet. Ser på $x > y$: Ved MVS

$\frac{\tan x - \tan y}{x - y} = \frac{1}{\cos^2 c} \geq 1$ $\left(c \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow |\tan x - \tan y| \geq |x - y|$. Helt tilsv. følger ulikheten for $x < y$.