LØSNINGSFORSLAG MA1101/MA6101
20.05.08

Vanlige forbehold! KH

Oppgave 1

La $P(n)$ være ulikheten

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1.$$

Vil vise at $P(1)$ er sann, og også $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ når $m \in \mathbb{N}$. Da gjelder $P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

P(1) sann: Siden $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x$, er $P(1)$ ok.

$P(m) \Rightarrow P(m+1)$: At $P(m)$ gjelder, betyr

$$(1+x)^m \geq 1+mx, \quad x \geq -1.$$

Siden $x \geq -1$ gjelder videre

$$(1+x)^m(1+x) \geq (1+mx)(1+x) = 1+(m+1)x+mx^2,$$

og dermed

$$(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x.$$

Framme!

Oppgave 2

Vi skal finne maksimum for $V = \pi r^2 h$ (1) når $h + 2\pi r = 6 \Leftrightarrow h = 6 - 2\pi r$, og innsatt i (1):

$V = \pi r^2(6-2\pi r)$ som studeres for $\underline{0 \leq r \leq \frac{3}{\pi}}$.

$\frac{dV}{dr} = \pi(12r - 6\pi r^2) = 0 \Leftrightarrow r = 0, \; \underline{r = \frac{2}{\pi}}$.

Da $V(0) = V(\frac{3}{\pi}) = 0$, og $V(\frac{2}{\pi}) > 0$, vil $\underline{\underline{r = \frac{2}{\pi} \text{(meter)}}}$ gi størst volum.

Oppgave 3

Her bruker vi sekantsetningen (middelverdisetningen) for $x \neq y$: $\left|\frac{\cos x - \cos y}{x-y}\right| = |-\sin c| \leq \underline{1}$ der c mellom x og y.

For $x = y$: $|\cos x - \cos y| = 0 \leq |x-y| = 0$.

Oppgave 4

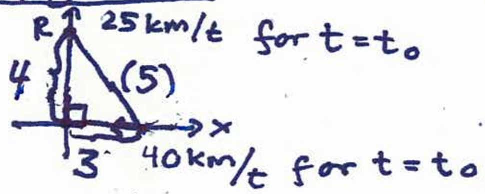
f er kontinuerlig for $-\frac{1}{2} \le x < \infty$. For $-\frac{1}{2} < x < \infty$ har vi

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{1}{(1+x)} > 0.$$

Altså er f strengt voksende i $[-\frac{1}{2}, \infty)$, og f har et minimum for $x = -\frac{1}{2}$, men ikke noe maks.

$\left(f(-\frac{1}{2}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},\ f(x) \nearrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ når } x \to \infty \right)$

Oppgave 5



La $a(t)$ være avstanden mellom de to ved tiden t.

$$a^2(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

$$2a(t)\,a'(t) = 2x(t)\,x'(t) + 2y(t)\,y'(t)$$

Ved $t = t_0$: $\underset{\overset{\shortparallel}{5}}{a(t_0)}\, a'(t_0) = \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{x(t_0)}\, \underset{\overset{\shortparallel}{-40}}{x'(t_0)} + \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{y(t_0)}\, \underset{\overset{\shortparallel}{25}}{y'(t_0)}$

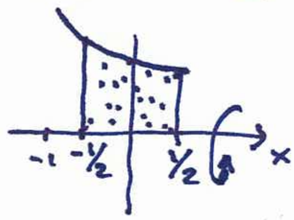
og $a'(t_0) = 3 \cdot (-8) + 5 \cdot 4 = \underline{-4}$

Avstanden mellom de to minker; $\underline{\underline{\frac{da}{dt} = -4 \text{ (km/t)}}}$

Oppgave 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^3} \underset{\substack{\text{l'H} \\ \text{Fu.T.}}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(1+x^2)6x} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 7



$$y = \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2\,dx = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)^4} = -\frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{(x+1)^3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{208}{81}\pi}}$$

Oppgave 8

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx = \int 1 + \frac{1-x}{x(x^2+1)}\,dx = \int\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\underline{\underline{I = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C}}$$

Oppgave 9

$$y' - y = x \quad \text{(linear 1. ordens d.l)}$$

$$\frac{d}{dx} e^{-x} y = x e^{-x}$$

$$e^{-x} y = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\underline{\underline{y = Ce^{x} - (x+1)}}$$

Oppgave 10

$y'' + y = 0$ har generell løsning $\underline{y = A\cos x + B\sin x}$

Tilpasser starturdiene:

$$y(0) = \underline{A = 0} \quad ; \quad y = B\sin x$$

$$y'(0) = B\cos(0) = \underline{B = 2}$$

Tilsammen $\underline{\underline{y = 2\sin x}}$