MA1101

Søndagsregning 16.12: Oppgavesettet består av

- oppgavene merket ✓ nedenfor
- oppgavene 8.3.9, 9.2.11, 9.3.11, 10.2.7 fra Lindstrøm

i alt 10 punkter. Tid: 2 timer.

Faglig kontakt: Kari Hag (73 59 35 21, 48 30 19 88) **Studentnr.** ________________

Semesterprøve i MA6101 den 04.11.07

Tid: 90 min. Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

DEL I

Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål i del I. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng. Hver korrekt oppgave teller 2 poeng.

1. Grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ er lik:

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ ∞ ☐ 1

✓ **2.** Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{3x}$ er lik:

☐ e^6 ☐ ∞ ☐ 1 ☐ $e^{\frac{3}{2}}$

✓ **3.** For hvilket tall a er funksjonen $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ a & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$ kontinuerlig?

☐ $a = 2$ ☐ Ingen verdi av a ☐ $a = \infty$ ☐ $a = 1$

4. Hvilken ulikhet gjelder for alle $x \in (0,1)$?

☐ $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ☐ $\arcsin x < x^2$ ☐ $\arcsin x < x$ ☐ $\arcsin x > x + \frac{x^2}{2}$

✓ **5.** Funksjonen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ er injektiv (en-entydig) når vi begrenser definisjonsområdet til dette intervallet:

☐ $(-\infty, 0]$ ☐ $[-2, 1]$ ☐ $[0, \infty)$ ☐ $[-1, 2]$

✓ **6.** Integralet $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ er lik:

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{4}{\pi}$ ☐ $\frac{\pi}{8}$

✓ **7.** Området begrenset av x-aksen og grafen til $f(x) = e^{x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, roteres om y-aksen. Hva blir volumet av omdreiningslegemet?

☐ π ☐ $(e-1)\pi$ ☐ 2π ☐ $2(e-1)\pi$

8. Et fly flyr i konstant høyde 8km over bakken. I et bestemt øyeblikk er avstanden til en radar på bakken 10km og øker med 480km/t. Hvor fort flyr flyet da?

☐ 480km/t ☐ 384km/t ☐ 600km/t ☐ 800km/t

LØSNINGER SØNDAGSPRØVEN

√2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{2}{x})\cdot 3x} = \underline{\underline{e^6}}$ da

da $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{2}{x})\cdot 3x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\,\frac{(-\frac{2}{x^2})}{1+2/x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3\cdot 2/1+2/x}{-1} = \underline{6}$

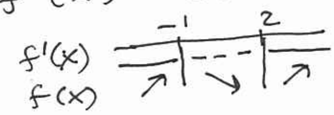
√3.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1} = \underline{2}$, $f(0) = \underline{a}$

For at f skal være kontinuerlig i $x=0$, må $\underline{\underline{a=2}}$.
(For alle andre verdier av x er f automatisk kont.)

√5. f er injektiv på intervaller der f er strengt voksende eller strengt avtagende. Så vi ser på $f'(x)$:

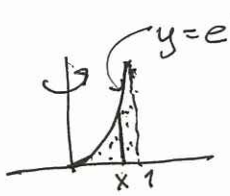
$f'(x) = 6x^2-6x-12 = 6(x^2-x-2) = 6(x-2)(x+1)$



f er injektiv på $\underline{\underline{[-1,2]}}$ (av de gitte)

√6. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx \underset{\boxed{\substack{u=x^2\\ du=2x\,dx}}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u\Big]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$

√7.



Bruker metoden med sylindriske skall

$V = \int_0^1 2\pi x h\,dx = \int_0^1 2\pi x\, e^{x^2}dx \underset{\substack{u=x^2\\ du=2x\,dx}}{=} \pi\int_0^1 e^u du = \underline{\underline{\pi}}$

Oppg. 8.39

Setter vi $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ gir Middelverditeoremet (Sekantsetningen)

$\frac{F(b)-\overbrace{F(a)}^{=0}}{b-a} = F'(c) \underset{Fu.T.}{=} f(c) \Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$

der c er et tall i (a,b).

Bmk. Kan være enig i at vi kan bruke en vilkårlig antiderivert som F !

Oppgave 9.2.11

$$I = \int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,dx$$

$$= \underbrace{\int \arctan x\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \underset{u'}{1}\cdot \underset{u}{\arctan x}\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) +$$

$$I = x\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \tfrac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

Bmk Oppgaven er løst på en litt annen måte hos Klara Hveberg.

Oppgave 9.3.11

$$I = \int \frac{2}{(t-1)(1+t^2)}\,dt = ? \quad \frac{2}{(t-1)(1+t^2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)(t^2+1)}$$

$(0t^2 + 0t) + 2 = (A+B)t^2 + (C-B)t + A - C$ oppfylt når

$0 = A+B$, $0 = C-B$, $2 = A-C \Leftrightarrow B=-A$, $C=B=-A$, $2A=2$; $A=1$, $B=C=-1$

$$I = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = \underbrace{\ln|t-1| - \tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)}_{} - \arctan t + C$$

(Lindstrøm har trukket sammen)

Oppgave 10.2.7

a) Må ha $V'(x) = -0.8 - 0.1V(x)$

eller $\frac{dV}{dx} + 0.1V = -0.8$; 1.ordens lineær d.l.

Løser d.l. ved metoden med int. faktor $e^{0.1x}$:

$$[e^{0.1x}\cdot V]' = -0.8\,e^{0.1x}$$

$$\Rightarrow e^{0.1x}\cdot V = -8\,e^{0.1x} + C \text{ eller } V = -8 + Ce^{-0.1x}$$

Da $V(0) = 30$ blir $C = 30+8 = 38$. $V = -8 + 38e^{-0.1x}$

b) Hva er x når $V(x) = 0$? Har $0 = -8 + 38e^{-0.1x}$

$8 = 38e^{-0.1x} \Leftrightarrow x = 10\ln\frac{19}{4} \approx 15.6$

Setter nå

$V(0) = -8 + C = L$, og har betingelsen (liter som trengs)

$-8 + (L+8)e^{-0.1\cdot 19.7} = 0 \Leftrightarrow L+8 = 8\cdot e^{1.97} \Leftrightarrow L = 8\cdot e^{1.97} - 8 \approx 49.4$