Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Per Hag, telefon 91743

Eksamen i MA1101 Grunnkurs i analyse I

Bokmål
Onsdag 6. juni 2007
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Vedlagt formelark for MA1101

Sensur: Onsdag 27. juni. 2007

Ved vurderingen teller i utgangspunktet hvert bokstavpunkt og punktene (i), (ii), (iii) i oppgave 2 - i alt 11 punkt - likt. **Husk at alle svar skal begrunnes!**

Oppgave 1

a) Regn ut det ubestemte integralet:

$$\int \ln x dx \quad ; \quad x > 0$$

b) Finn volumet av omdreiningslegemet som framkommer når flatestykket begrenset av grafen til funksjonen

$$y = \ln x \quad ; \quad 1 \leq x \leq 3,$$

av x-aksen og av linjen $x = 3$ roteres om x-aksen.

Oppgave 2 Bestem følgende grenseverdier:

(i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}$$

ii)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)$$

(iii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}$$

Oppgave 3

a) Bestem konstantene A, B og C slik at

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

b) Regn ut integralet

$$\int_2^3 \frac{3x dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

Oppgave 4 $T = T(x)$ er en funksjon som gir frysepunktet T i °-Fahrenheit for saltvann som funksjon av saltkonsentrasjonen x i vannet. Teoretiske betraktninger gir følgende sammenheng:

$$\frac{dT}{dx}=-\frac{T^2}{2+x}$$

Bestem funksjonen $T = T(x)$ når det opplyses at $T(0) = 32$.

Oppgave 5

a) Funksjonene f og g er begge definert for $0 < |x - x_0| < \delta_0$. Vi antar at $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ og at $|g(x)| \leq M$ for $0 < |x - x_0| < \delta$. Bevis ved $\epsilon - \delta$-argument at da vil

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

b) Vis at $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ ikke eksisterer og at $\lim_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x}) = 0$.

c) Gitt funksjonen:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

Vis at da vil $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$.