

LØSNINGER ENKELTE OPPGAVER ØVING 10

Det meldes om nydelige besvarer (i hvert fall fra LUR-gruppa!) Disse kan trenge løsninger:

• Oppg. 9.2.15 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}}_{I_2}$

(Synes det er naturlig å dele opp da I_2 er lett!)

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-2x}{(-2)\sqrt{4-x^2}} dx = \int_4^1 u^{-1/2} du = -u^{1/2} \Big|_4^1 = -1 + 2 = 1$$



Det virker som $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, for ikke å snakke om $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$, er uløst! (a ≠ -1)

I_1 : Vi innfører $x = 2 \sin u$ ($u = \arcsin \frac{x}{2}$), $dx = 2 \cos u du$
og får $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{2 \cos u}{2 \cos u} du = \int du = u = \arcsin \frac{x}{2} + C$

Altså blir $I_1 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{3}$. $I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3} + 1$

• Oppg. 9.2.23

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \underbrace{(\arcsin x)^2}_u dx = \pi \left[x(\arcsin x)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2 \arcsin x}_{u'} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{u'} dx \\ &= \pi \left\{ x(\arcsin x)^2 \right]_0^1 + \left[\sqrt{1-x^2} \cdot 2 \arcsin x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \} \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 \right\} = \underline{\underline{\pi^3/4 - 2\pi}} \end{aligned}$$

FOR KORTES

• Oppg 9.3.5(f) Graden i teller < Graden i nevner. Delbrøkkoppsetter.

$$\frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (A+C)x + (A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Likheten derfor oppfylt om

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad A+B &= 3 \\ (ii) \quad 2A+C &= 1 \\ (iii) \quad A-B-C &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(De som kan, og liker,} \\ \text{Gaussisk el, bruker det)} \end{array}$$

Av (i) $B = -A + 3$, av (ii) $C = 1 - 2A$,
og innsett i (iii) $A = 1$ som i sin tur gir $C = -1$, $B = 2$.

Dermed

$$\int \frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C}}$$