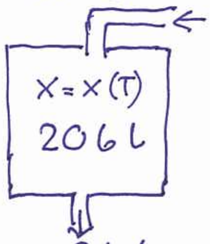
LØSNING / KOMMENTAR OPPGAVE 11. ØVING

Oppg. 10.2.11. Her får vi lettest regning om vi „flytter klokka"; la $T = t - 3$.



0.5 kg/min med salt strømmer inn

2 l/min av oppløsningen strømmer ut

- Vi har $x = x(T)$ kg salt i tanken ved tiden T; $x(0) = 1.5$.

$$\frac{dx}{dT} = \text{salt inn}/\text{min} - \text{salt ut}/\text{min}$$

$$\frac{dx}{dT} = 0.5 - \frac{x}{206} \cdot 2$$

$$\frac{dx}{dT} + \frac{x}{103} = 0.5 \underset{*}{\Rightarrow} \frac{d}{dT}\left(x e^{T/103}\right) = 0.5 e^{T/103}$$

$$x e^{T/103} = \frac{103}{2} e^{T/103} + C$$

$$x = \frac{103}{2} + C e^{-T/103}$$

Siden $x(0) = 1.5$, må vi ha $1.5 = \frac{103}{2} + C \Leftrightarrow C = -50$

Spesielt blir $x(22) = 51.5 - 50 e^{-22/103} \approx 11.12$ (kg)

$x = x(T) = \frac{103}{2} - 50 e^{-T/103} \longrightarrow \frac{103}{2}$ når $T \to \infty$ (Rimelig!)

Kommentar Dersom vi holder oss til t, har vi

$$\begin{cases} \text{i)}\ \frac{dx}{dt} = 0.5 \quad ; \ 0 \le t \le 3 & \underset{x(0)=0}{\Rightarrow} x = 0.5t \ ; \ 0 \le t \le 3 \\ \text{ii)}\ \frac{dx}{dt} = 0.5 - \frac{x}{206} \cdot 2 \ , \ t \geq 3 & \underset{*}{\Rightarrow} x = \frac{103}{2} + C e^{-t/103} \end{cases}$$

Av i) $x(3) = 1.5$.

Innsatt i ii)-løsningen: $1.5 = \frac{103}{2} + C e^{-3/103}$

$$\Rightarrow C e^{-3/103} = -50 \ (C \text{ blir „stygg"})$$

$$x(25) = 51.5 - C e^{-25/103}$$

$$= 51.5 - C e^{-3/103} \cdot e^{-22/103} = 51.5 - 50 e^{-22/103} \approx 11.12$$

$$x = \frac{103}{2} + C e^{-t/103} \longrightarrow \frac{103}{2} \text{ når } t \to \infty.$$

LØSNINGER 12. ØVING

Oppg. 10.5.1 b) $y'' + 5y' + 4y = 0$

(K) $r^2 + 5r + 4 = 0$ med røtter $r_{1,2} = -1, -4$

Løsningene blir da $y = Ce^{-x} + De^{-4x}$

c) Se Klara Hvebergs løsningsforslag (hefte eller nett)

d) Differensialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

har karakteristisk ligning

$$r^2 - 2r + 5 \Leftrightarrow (r-1)^2 + 4$$

Altså blir løsningene $y = e^x(C\cos 2x + D\sin 2x)$

Oppg. 10.5.3.

a) Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y'' - 5y' + 4y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = -4$$

Den karakteristiske ligning blir

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-4) = 0$$

Løsningene blir da

$$y = Ce^x + De^{4x} \overset{i)}{\Rightarrow} y(0) = C + D = 2$$
$$\text{med } y' = Ce^x + 4De^{4x} \overset{ii)}{\Rightarrow} y'(0) = C + 4D = -4$$

Av i) $D = 2 - C$ som innsatt i ii) gir $C + 8 - 4C = -4$

Altså $C = 4$, $D = -2$, og løsningen blir

$$y = 4e^x - 2e^{4x}$$

d) Samme spørsmål når

$$y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Her blir (K) $r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 + 1 = 0$

Altså er løsningene av diff. ligningen

Gir mindre arbeid her

$$y = Ce^{-2x}\cos x + De^{-2x}\sin x$$

Da $y(0) = 0$ blir $C = 0$ slik at $y = De^{-2x}\sin x$.

$y' = -2De^{-2x}\sin x + De^{-2x}\cos x$ og $y'(0) = 1 \Leftrightarrow D = 1$

Løsningen blir altså $y = e^{-2x}\sin x$

e) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(1) = -e^3$, $y'(1) = -6e^3$

(K) $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$; dobbelrot!

Altså er løsningene $y = (Cx + D)e^{3x}$, $y' = (C + 3D + 3Cx)e^{3x}$

$y(1) = (C + D)e^3 = -e^3 \Leftrightarrow C + D = -1 \Leftrightarrow D = -C - 1$

$y'(1) = (4C + 3D)e^3 = -6e^3 \Leftrightarrow 4C + 3D = -6$

$C = -3$, $D = 2$

Løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene er

$$y = (2 - 3x)e^{3x}$$

Oppg. 10.5.5 („Baklengs-oppgave")

a) Vi skal finne en 2. ordens homogen diff. lign. med konstante koeffisienter som har løsn. $y = xe^{-2x}$.

Den karakteristiske ligningen må være*) $(r+2)^2 = 0$ eller $r^2 + 4r + 4 = 0$ dvs. diff. lign. er $y'' + 4y' + 4 = 0$

*) forutsatt koeff. foran r^2 lik 1

TRYKKFEIL FASIT

b) Den generelle løsningen av diff. lign. i a) er

$y = (C + Dx)e^{-2x}$; $y(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

$y = Dxe^{-2x} \Rightarrow y' = (D - 2Dx)e^{-2x}$ og $y'(0) = 1 \Leftrightarrow D = 1$

(At $y = x$ tangerer i $(0,0)$ betyr $y'(0) = 1$)

Altså er den søkte løsningen $y = xe^{-2x}$

Vi hadde altså ikke trengt noen generell løsning!

Oppg. 10.5.8 ~~a~~c) Se Klara Hveberg.

Oppg. 10.5.11 Se Klara Hveberg her også.

Oppg. 10.6.3

a)b) Den korr. karakteristiske ligning er

$r^2 - 2r - 3 = 0$ med $r_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

slik at den generelle løsningen til homogen lign er

$$y_H = Ce^{3x} + De^{x}$$

Skal bestemme A slik at $y = Ae^x \sin 2x$ er løsning til gitt diff. lign. (Da har vi også vist at

(*) $y'' - 2y' - 3y = e^x \sin 2x$ har en løsn. på formen $y = Ae^x \sin x$!)

$$\begin{array}{r|l} -3 & y = Ae^x \sin 2x \\ -2 & y' = A(e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x) \\ & y'' = A(e^x \sin 2x + 4e^x \cos 2x - 4e^x \sin 2x) \end{array}$$

$$y'' - 2y' - 3y = A(-8e^x \sin 2x) = e^x \sin 2x \Leftrightarrow \underline{A = -\tfrac{1}{8}}$$

Generell løsning av (*) er $y_H + y_P$; altså

$$\underline{\underline{y = Ce^{3x} + De^x - \tfrac{1}{8}e^x \sin 2x}}$$

Oppg. 10.6.9

a) (K) $r^2 + 3r + 2 = 0$; $r_{1,2} = -1, -2$

$$\underline{\underline{y_H = Ce^{-x} + De^{-2x}}}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} 2 & y = Ax + B + E\sin x + F\cos x \\ 3 & y' = A + E\cos x - F\sin x \\ & y'' = -E\sin x - F\cos x \end{array}$$

$$y'' + 3y' + 2y = 2Ax + (3A + 2B) + (E - 3F)\sin x + (F + 3E)\cos x$$
$$= 4x + 0 + 10\sin x + 0\cos x \quad \text{(alle x)}$$

Oppfylt når $\underline{A = 2}$, $2B = -3A = -6 \Leftrightarrow \underline{B = -3}$

$$\left.\begin{array}{l} F = -3E \\ -3F + E = 10 \end{array}\right\} \underline{E = 1}, \ \underline{F = -3}$$

Differensialligningen har løsning $\underline{2x - 3 + \sin x - 3\cos x}$
(som er på formen $Ax + B + C\sin x + D\cos x$)

c) $y = Ce^{-x} + De^{-2x} + 2x - 3 + \sin x - 3\cos x$; $y(0) = 0 \Leftrightarrow \underline{C + D - 6 = 0}$

$y' = -Ce^{-x} - 2De^{-2x} + 2 + \cos x + 3\sin x$; $y'(0) = \underline{-C - 2D + 2 + 1 = 1}$

Av den første lign. $\underline{D = 6 - C}$ som innsatt i den andre gir $\underline{C = 10} \Rightarrow \underline{D = -4}$

$\therefore$: $\underline{\underline{y = 10e^{-x} - 4e^{-2x} + 2x - 3 + \sin x - 3\cos x}}$