LØSNINGER TIL UTVALGTE OPPGAVER Ø6

Oppgave 6.3.19 (Fra s. 277 vet vi $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ alle $n\in\mathbb{N}$.)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^n}}{e^{e^x}} = \lim_{x\to\infty} e^{(x^n-e^x)} = e^{\lim_{x\to\infty}(x^n-e^x)} = e^{-\infty} = \underline{0}$$

da $\lim_{x\to\infty}(x^n-e^x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{e^x}-1\right)e^x = -\infty$.

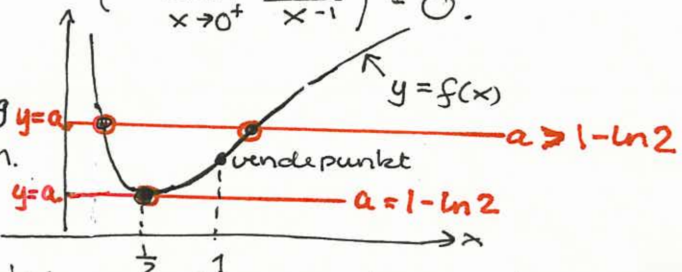
Altså fungerer $f(x) = e^{e^x}$ som en funksjon slik at $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^n}}{f(x)} = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 6.4.7 (Merk intervallene som er oppgitt i fasiten på a) og b): Tom Lindstrøm har innført konveks/konkav og voksende/avtagende uten å ty til deriverte. „Når funksjonen er kontinuerlig blir også endepunktene med".)

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x + \frac{1}{2x}\right) = „-\infty+\infty" = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\ln x+1}{2x}$

$= „\frac{1}{0}" = \underline{\underline{\infty}}$ da $\lim_{x\to 0^+} x\ln x \left(= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}\right) = 0$.

d) $f(\frac{1}{2}) = 1-\ln 2 \approx 0.306$ og $x=\frac{1}{2}$ gir (globalt) min. Når $a < 1-\ln 2$, har vi ingen løsning.



Når $a = 1-\ln 2$ har vi løsningen $x = \frac{1}{2}$. Når $a > 1-\ln 2$ har vi to løsninger av $f(x)=a$, en løsning i $(0,\frac{1}{2})$ og en løsning i $(\frac{1}{2},\infty)$: Funksjonen er strengt monoton i intervallene, $\lim_{\substack{x\to 0^+\\(x\to\infty)}} f(x) = \underset{(+)}{\infty}$.

Oppgave 7.1.10. Belysningen er gitt ved

$B = k\frac{\sin\theta}{d^2}$ der k er en konstant og $\frac{1}{d} = \cos\theta$.

Altså søker vi maksimum for funksjonen

$B = k\sin\theta\cos^2\theta = k\sin\theta(1-\sin^2\theta) = k(\sin\theta - \sin^3\theta)$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Kritiske punkt i $(0,\frac{\pi}{2})$: $\frac{dB}{d\theta} = k(\cos\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta) = 0$; $\sin^2\theta = \frac{1}{3}$

$B(0) = B(\frac{\pi}{2}) = 0$, $B(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$. Altså gir den siste θ-verdien maksimum på $[0,\frac{\pi}{2}]$. Har $\sin^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{2}{3}$ og $h = \tan\theta = \underline{\underline{1/\sqrt{2}}}$