LØSNINGER UTVALGTE OPPG. 7Ø

Oppg. 7.4.1(g) $f(x) = e^{-(x+1)^2}$; $x \in (-\infty, -1) = D_f$

$f'(x) = -2(x+1)e^{-(x+1)^2} > 0$ når $x+1 < 0 \Leftrightarrow x \in D_f$

Altså er f strengt voksende i D_f; f er dermed injektiv og har følgelig en invers funksjon f^{-1} definert på $V_f = (0, 1)$. Formel for f^{-1}:

$y = e^{-(x+1)^2} \Leftrightarrow \ln y = -(x+1)^2 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{-\ln y}$

Siden $V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -1)$ ser vi at vi må velge $-\sqrt{-\ln y}$.

Oppg. 7.5.3

(c) $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln(\cot x)} = e^0 = \underline{\underline{1}}$ da

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{1/x} \text{ "}=\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/\cot x \cdot -1/\sin^2 x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 1/\cot x \cdot -\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 0 \cdot (-1) \cdot 1^2 = \underline{0}$$

Prøver å få til brøk

(d) $\lim_{x\to\infty} (\cot \frac{1}{x} - x) = \text{"}\infty - \infty\text{"} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to 0^+} (\cot t - \frac{1}{t}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\cos t - \sin t}{t \sin t}$

$$\text{"}=\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cancel{\cos t} - t\sin t - \cancel{\cos t}}{\sin t + t\cos t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t}{1 + \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t} = -\frac{0}{1+1} = \underline{\underline{0}}$$

Oppg. 7.6.8 på eget ark.

#8, s. 344-345:

(a) Vi skal bestemme A og B slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{1+x^2} & ; \quad x \geq 0 \\ Ae^x + B & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

blir deriverbar – og dermed også kont. i $x=0$.

Vi observerer først at $f(0)=0$ (NB! $x \geq 0$ i def.)

Vi har: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\arctan x}{1+x^2} = 0$,

altså $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$. Det gjelder da å velge A og B s.a. også $\lim\limits_{x\to 0-}(Ae^x+B) = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0-}(Ae^x + B) = A+B$. Får dermed

$$A+B=0 \quad ; \quad \underline{B=-A}$$

Nok til å sikre kontinuitet

Videre må vi ha for deriverbarhet

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{Ae^x+B}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{Ae^x - A}{x} = A \lim_{x\to 0-} \frac{e^x-1}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0-} Ae^x = \underline{A}$$

NB!

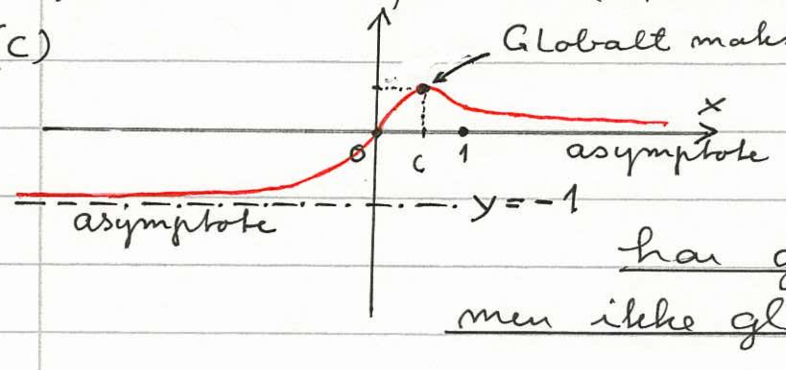
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x}$$

$$= 1 \cdot \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/(1+x^2)}{1} = \underline{1} \qquad \text{Altså: } \underline{A=1}$$

og dermed $\underline{B=-1}$.

(b) $f'(x) = \dfrac{\overbrace{1-\overbrace{2x\arctan x}^{\text{strengt voksende}}}^{\text{strengt avtagende}}}{(1+x^2)^2}$ for $x>0$, $f'(0)=1$, $f'(1) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} < 0$. Det fins eksakt ett $c \in (0,1)$ s.a. $f'(c)=0$ og $f'(x)>0$ for $x \in (0,c)$ mens $f'(x)<0$; $x>c$.

(c)



NB! Funksjonen er begrenset: $V_f = (-1, f(c)]$ har globalt maksimum, men ikke globalt minimum!!