

LØSNING ENKELTE OPPGAVER 9. ØVING

Det rapporteres om bra innsats denne gangen også!

To oppgaver kan trenge et løsningsforslag:

Oppgave 8.5.4

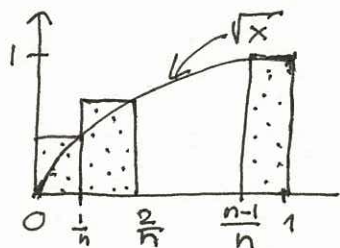
Vi skal bevise at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right) = \frac{2}{3}$$

Vi merker oss at $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \left[\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right]$

er en Riemannsum til funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$

når $\Pi = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ og $U = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$



Fra Korollar 8.5.4 har vi da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \right) = \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$= \int_0^1 x^{1/2} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(*) Her bruker vi fundamentalteoremet.

Jons Ekstraoppgave: Hva er $\lim_{m \rightarrow \infty} (1^n + 2^n + \dots + m^n) / m^{n+1}$?

[Svar: $\frac{1}{n+1}$]

Oppgave 8.6.4

Vi skal bestemme buelengden til grafen til $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$

fra $x=1$ til $x=e$. Vi har $y' = x - \frac{1}{4x}$. Dermed

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}} dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}} dx = \int_1^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln x \right]_1^e = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}$$

Ellers: Pass på integrasjonsgrenser! Når

vi innfører $u = g(x)$ har vi $\int_a^b \dots dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \dots du$,

evt. regner vi ut det ubestemte u -integralet og substituerer til slutt $u = g(x)$ med x -grenser a og b .