Øvingsoppgaver, Lørdagsverksted, 27.10.07

Oppgaver:

1) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

2) $\int \frac{e^x}{\sqrt{(1-e^{2x})}} dx$

3) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

4) $\int \frac{x^2+2x-3}{x+1} dx$

5) $\int \frac{3x^2+x}{(x-1)(x^2+2x+1)} dx$

6) $\int \sqrt{(4-x^2)} dx$

7) $\int \sin x \cos x \ln(\sin x) dx$

8) $\int \ln x dx$

9) $\int \frac{2}{x^2(x-3)} dx$

10) Regn ūt det ūbestemte integralet:

a) $\int \frac{dx}{x(x^2-2x+2)}$ b) $\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx$

11) a) Vis at $y = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ er en løsning av diff. lign. $y' + 2xy = x$

b) Finn alle løsningene av diff. lign.

$y' + 2xy = x$

(NB! Hva er forskjellen på oppgave a) og b)?

Tips til fremgangsmåter

(med forbehold om trykkfeil)

Oppgaver:

1) *i)* Vi ser at både roten av x og dens deriverte dukker opp. Substitusjon er ofte nøkkelen i slike oppgaver.

ii) Prøv $u = \sqrt{x}$. u er altså en funksjon av x. Hva blir da den deriverte, $\frac{du}{dx}$?

iii) "Bytt" alle x i integralet med det tilsvarende i u (husk å substituere dx).

2) *i)* Samme situasjon som i a), både e^x og dens deriverte opptrer i integralet.

3) *i)* Dersom substitusjon er våpenet, hva skal vi velge som u?

ii) Med $u = \sqrt{x}$ får vi $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, eller $dx = 2\sqrt{x}du$. Problemet er bare at vi skal substituere alle x med u, her har vi $\sqrt{x}$. Hva er denne i u?

iii) Nå gjenstår det å integrere $\int e^u \cdot 2udu$, som krever et annet redskap enn substitusjon...

4) *i)* Integralet er på "delbrøk"-form, og vi følger derfor oppskriften. Det første er å sjekke graden, og siden telleren har høyere grad enn nevneren starter vi med polynomdivisjon.

ii) Etter polynomdivisjonen sitter vi med tre atskillig enklere utfordringer, der ett av dem har sammenheng med logaritmen.

5) *i)* Nok en delbrøk. Siden graden i telleren er lavene enn i nevneren, trenger vi ikke polynomdivisjon. Da går vi videre til neste trinn som er å bestemme formen for delbrøkoppspaltningen, og deretter bestemme koeffisientene. Husk at "indre grad" bestemmer graden i telleren, "ytre grad" bestemmer antall ledd. Glem heller ikke at nevneren skal være ferdig faktorisert før delbrøksoppspaltningen kan starte.

ii) Etter koeffisientene er bestemt, har vi tre nye integral å bestemme. For den delen med grad 2 i nevneren, kan substitusjon være en innfallsport.

6) *i*) Målet er å bruke hintet på formen $1-\sin^2 x = \cos^2 x$. Vi vil gjerne få $1-\sin^2 x$ inn under rottegnet i nevneren. Vi omformer:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}} = 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

ii) Dersom vi nå substituerer $\frac{x}{2} = \sin u$, får vi at $x = 2\sin u$ og $dx = 2\cos u\, du$.

iii) Formelen $\cos^2 v = \frac{\cos 2v + 1}{2}$ kan være kjekk når man skal integrere $\int \cos^2 u du$.

7) *i*) Her ser vi at både $\sin x$ og dens deriverte dukker opp.

ii) Etter substitusjonen er delvis integrasjon en vei å gå. Hvorfor? Husk at dersom første valg av u og v i delvis integrasjon ikke virker, kan det hende det fungerer å bytte.

8) *i*) Hvorfor fungerer ikke substitusjon?

ii) Delbrøksoppspaltning er utelukket (hvorfor)? Hvordan kan vi bruke delvis integrasjon?

iii) Delvis integral bruker vi på utrykk av formen $\int u(x)v'(x)dx$. Dersom vi velger $\ln x$ lik en av disse, hva må den andre faktoren bli?

9) *i*) Følg fremgangsmåten for delbrøksoppspaltning.

10) a) *i*) Integralet er på "delbrøk"-form, så vi følger oppskriften. Etter delbrøkoppspaltning, får vi de to integralene $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \int\frac{-\frac{1}{2}x+1}{x^2-2x+2}dx$. Det første er greit, men hva med det andre?

ii) Vi skriver om for å få vekk den brudne brøken: $\int\frac{x-2}{x^2-2x+2}dx$ (med en faktor $-\frac{1}{2}$ foran). Nå skal vi forsøke å skrive om telleren (men samtidig beholde likheten) slik at den ligner mest mulig på den deriverte av nevneren (Hvorfor? Tenk på logaritmen). Siden den deriverte av nevneren er $2x-2$, starter vi med å multiplisere b)

i) Delbrøk gir oss de ti integralene $\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-x+1}{x^2+1} dx$. Det lønner seg å dele opp det siste integralet i to deler. Det første (med $-x$ i telleren) kan løses ved en substitusjon. Den andre er den deriverte av en kjent og kjær invers funksjon…

ii) Den eksakte verdien av integralet finner vi ved enkel innsetting (bruk $\lim_{x\to\infty} f(x)$ når den øvre grensen behandles).

(11) a) Vis at høyre og venstre side er lik hverandre når $y = e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ (sett prøve på ligningen!)

b)

Separabel : $\frac{dy}{dx} = x - 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = x(1-2y)$$

$$\frac{dy}{1-2y} = x\,dx$$

Integrer på begge sider av likhetstegnet

Dektektiven

Teamet skal først velge sjefsetterforsker, og denne leser oppgaven for de andre.

Team: 3 personer utgjør ett etterforskningsteam: Sjefsetterforsker, inspektør og assistent.

Oppdrag: Det er funnet en død mann i et av hvilerommene på Gløshaugen, NTNU, Trondheim. Hvert team skal forsøke å finne ut hvem gjerningsmannen er.

Strategi: Opplysningene står på rutekartet (vedlegg 1). For å finne ut hvilke opplysninger som er korrekte må teamene løse oppgaver (vedlegg 2). For hver oppgave får man en ny opplysning, og teamet må etter hvert avgjøre når man har nok opplysninger til å løse oppgaven.

Utdrag fra politiets logg:

Avdøde ble oppdaget 06.28 av en i Gløshaugens rengjøringspersonale. Hun ringte øyeblikkelig politiet, som var på åstedet 06.45. Det ble da foretatt en avsperring av området, og spor ble sikret.

Vitner: Ingen vitner har meldt seg for politiet.

Mistenkt 1: Harald Krag (student).
Mistenkt 2: Mons Jørgensen (arbeidsledig).

Alibi: Hr Krag har forklart for politiets taktiske etterforskere at han var på et sosialt arrangement på Harveys i Trondheim sentrum sammen med medstudenter kvelden i forveien. Flere som var tilstede på samme arrangement kan bekrefte dette. Presis 00.00 dro hr Krag fra Harveys og hjem til sin hybel der han bor alene. Han la seg til å sove alene, og ble vekt av telefonen fra politiet neste morgen.
Hr Jørgensen sier han var hjemme hele kvelden. Klokken tolv kom hans samboer hjem fra kveldsvakt, og hun kan bekreft at han var hjemme fra midnatt og til politiet ringte.
Begge mistenkte har motiv for ugjerningen.

Begge alibiene anses som vanntette.

Det lokale politiet trenger nå ekspertisehjelp fra ditt team, og de trenger det nå! Journalister fra alle kanaler forventer grundig informasjon før de skal på lufta klokka 21.00 i kveld.

Før teamet tar fatt på denne utfordringen, kommer rettsmedisiner Randi Mauser bort til deg. Hun kan fortelle teamet ditt at hun har tatt temperaturen på liket flere ganger med jevne mellomrom. Den første målingen gjorde hun presis 07.00. Opplysningene ligger gjemt i vedlegg 1. Hun forteller også at det er slik at temperaturen til liket avtar proposjonalt med differansen mellom temperaturen til kroppen og romtemperaturen. "Aha!" tenker du. "Da har jeg en ide! Ordene "proposjonalt med" kan bety bare en ting..."

Oppgavene (vedlegg 2)

Først kommer spørsmålet (i kursiv) som er knyttet til oppdraget. Dersom dere løser oppgaven under hvert spørsmål, vil dere få en henvisning til rutenettet (vedlegg 1). Dette er da svaret på spørsmålet, og gir en opplysning knyttet til oppdraget.

1) *Hva slags type ligning får vi i oppdraget?*

   Oppgave: Er $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?

   a) Ja (F4) b) Nei (E3) c) Ja, men kun for $x = y = 0$ (E3)

2) *Hva var temperaturen ved første måling?*

   Oppgave: Hvilke av disse er lik $\ln(a+b)$?

   a) $\ln a + \ln b$ (D2) b) $(\ln a)(\ln b)$ (C5) c) Ingen av alternativene (C6)

3) *Hva var temperaturen til avdøde 60 minutter etter første måling?*

   Oppgave: Er det riktig at dersom en funksjon er deriverbar så er den også kontinuerlig?

   a) Ja (D6) b) Ikke alltid (E3) c) Nei (F6)

4) *Hva var temperaturen til avdøde 120 minutter etter at han ble funnet?*

   Oppgave: Hvilken berømt matematiker var det som, i en alder av 6 år, la sammen de 100 første naturlige tallene i løpet av få minutter?

   a) Nils Henrik Abel (C7) b) Carl Friedrich Gauss (D4) c) Pierre de Fermat (C2)

5) *Hva er romtemperaturen?*

   Oppgave: Hva er den deriverte til $f(x) = \ln x$?

   a) $1/x$ (B2) b) x^2 (B7) c) $\sin x$ (G7)

6) *Anta at personen døde ved tiden $t = \lambda$. Dersom man antar at man oppdager liket ved tiden $t = 0$, hvordan kan man uttrykke dødsøyeblikket ved hjelp av $T(t)$?*

   Oppgave: Hva er 5! ?

   a) 105 (D7) b) 120 (F5) c) 50 (E5)

7) *Hva betyr det at kroppstemperaturen proposjonalt med differansen mellom kroppstemperaturen og romtemperaturen?*

Oppgave: Dersom vi først integrerer en funksjon f(x) for så å derivere den, hva får vi da?

a) 0 (E6) b) f(x) (F2) c) f'(x) (E2)

8) *Hvordan ser grafen til T(t) ut?*

Oppgave: Er det alltid slik at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$?

a) Ja (F7) b) Nei (G3)

9) *Hvordan kan man sette opp en tidslinje?*

Oppgave: Hva er $\sin(\pi/2)$?

a) 1 (C3) b) -1 (D5)

10) *Hva er normal kroppstemperatur?*

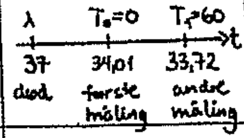
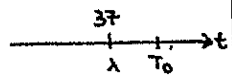
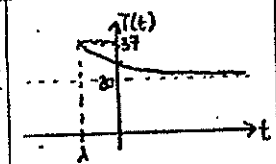
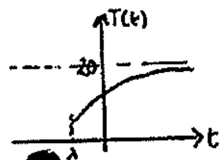
Oppgave: I en rettvinklet trekant er den ene kateten 3 og den andre 4. Hva er hypotenusen?

a) 5 (A6) b) 6 (C4) c) 7 (E4)

11) *Hvordan ser funksjonen for temperaturen i kroppen ut?*

Oppgave: Hva er den mest sannsynlige summen når man kaster to terninger?

a) 5 (G1) b) 6 (G5) c) 7 (D1)

	1	2	3	4	5	6	7
A	19	19,89	48	103,14	59,01	37	28
B	38,7	20	31,15	14,3	Differensial-ligning	20,89	21
C	21,17	32,00		36	36,90	34,01	32,09
D	$T(t)=20+14{,}01\left(\frac{13{,}72}{14{,}01}\right)^{t/60}$	32,17	20,98	33,45		33,72	$T(-\lambda)=20$
E	17,03	$\frac{dT}{dt}=kT$	Separabel differensial-ligning	39	$T(37)=\lambda$	$\frac{dT}{dt}=k$	37
F	13,09	$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_r)$; T_r = romtemp.	103,00	Andregrads-ligning	$T(-\lambda)=37$	31,12	
G	$T(t)=20+37e^{-60t}$	70,89		40,41	$T(t)=14{,}01e^{60t}$	36	19

RUTEKARTET (VEDLEGG 1)