Delvis integrasjon

Formel: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

Eksempel 1

Beregn $\int x \ln x \, dx$.

Vi prøver delvis integrasjon (hvorfor?):

$u = x \qquad u' =$

$v = \qquad v' = \ln x$

Vi prøver på nytt:

$u = \ln x \qquad u' =$

$v = \qquad v' = x$

Setter inn i formelen:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}}$$

Er svaret riktig?

Derivasjonstest:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\right]$$

$$= x\ln x + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\cdot 2x$$

$$= x\ln x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x$$

$$= \underline{x \ln x}\,. \qquad \Delta$$

Eksempel 2

Beregn $\int x e^{-x^2} dx$.

Vi velger delvis integrasjon:

$u = x \qquad u' =$

$v = \qquad v' = e^{-x^2}$

Vi prøver igjen:

$u = e^{-x^2}$ $\qquad$ $u' =$

$v =$ $\qquad$ $v' = x$

Innsatt i formelen:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(-2xe^{-x^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \int x^3e^{-x^2}\,dx$$

Hva nå ...?

Substitusjon

Formel : $\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx = F[g(x)] + C$.

Eksempel 3 (2)

Beregn $\int x e^{-x^2}\,dx$.

Prøver $u = -x^2$. u er en funksjon av x, vi kan altså finne den deriverte av u m.h.p. x :

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$du = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,du = x\,dx$$

$$\begin{aligned}\int x e^{-x^2}\,dx &= \int -\frac{1}{2} e^u\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int e^u\,du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C}}\end{aligned}$$

Eksempel 4

Beregn $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Vi prøver $u = \sqrt{x}+1$. Dette gir:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x}\,du = dx.$$

Men: her får vi x på begge sider, og innsatt i det opprinnelige integralet gir oss:

$$\int \frac{1}{u} \cdot 2\sqrt{x}\,du.$$

Husk; valget $u = \sqrt{x}+1$ kan manipuleres som vi ønsker (etter de regnereglene vi er vant til så klart). Det vil si:

$$u = \sqrt{x}+1$$
$$\sqrt{x} = u-1$$
$$x = (u-1)^2$$

Vi har funnet den omvendte funksjonen, altså x uttrykt ved u. Vi kan da finne den deriverte av x m.h.p u:

$$x = (u-1)^2$$

$$\frac{dx}{du} = 2(u-1)$$

$$dx = 2(u-1)du$$

Innsatt i integralet:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot 2(u-1)\,du$$

$$= 2\int \frac{u-1}{u}\,du$$

$$= 2\int\left(\frac{u}{u} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= 2\left[u - \ln|u|\right] + C$$

$$= \underline{\underline{2\left[\sqrt{x}+1-\ln(\sqrt{x}+1)\right] + C}}$$

Delbrøkoppspalting

1. Brukes på uttrykk av formen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, der P og Q er polynomer.
2. Graden til nevneren må være større enn graden til telleren (hvis ikke; polynomdivisjon).
3. Nevneren må være fullstendig faktorisert.

Eksempel 5

Bestem delbrøksoppspaltingen til

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)^3 (x+2)(x^2+2x+5)^2}$$

"Ytre grad" (multiplisitet):
- bestemmer antall ledd

"Indre grad":
- bestemmer formen på telleren

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)^3(x+2)(x^2+2x+5)^2} = \frac{}{(x-1)} + \frac{}{(x-1)^2} + \frac{}{(x-1)^3}$$

$$+ \frac{}{x+2}$$

$$+ \frac{}{(x^2+2x+5)} + \frac{}{(x^2+2x+5)^2}$$

Altså; telleren i delbrøkene skal være et generelt polynom av grad 1 mindre enn "indre grad" i nevneren. Husk at alle nevnerene skal være forskjellige!

Δ

Eksempel 6

Beregn $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$.

Vi har polynom i teller og nevner. Graden til nevneren er større enn graden til telleren.

Men; nevneren er ikke fullstendig faktorisert!

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} \qquad \frac{B}{x+2} \qquad (*)$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx - 2B}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

Dersom likheten skal gjelde, må vi kreve at tellerene er lik hverandre (nevnerene er allerede like).

$$1 = (A+B)x + (2A-2B)$$

En ligning, to ukjente! (A og B)

$$A + B = 0$$
$$2A - 2B = 1$$

Vi løser ligningssystemet, og får

$A = 1/4$ og $B = -1/4$.

Vi setter inn i (*), og får

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1/4}{x-2} + \frac{-1/4}{x+2}.$$

Differensialligninger

Ligninger som inneholder både en funksjon, f.eks. $y(x)$, og dens deriverte, $y'(x)$.

Brukes til å beskrive bl.a. endringer.
Da trenger vi å vite:

$\frac{dy}{dx}$ = "endringen i y pr. enhet x".

$\frac{dy}{dx} = ky$ betyr da "endringen i y pr. enhet x er proporsjonal med y".

De typer diffligninger vi møter i dag, kan deles inn i førsteordens separable / ikke-separable og med eller uten initialkrav.

Separable diff.ligninger

Gitt diffligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

Dersom vi kan få alle x (samt dx) på en side og alle y (og dy) på den andre, kalles ligningen separabel.

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

$$dy = 3y\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = 3\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx$$

$$\ln|y| = 3x + c$$

$$|y| = e^{3x+c} = e^{3x} \cdot e^{c} \qquad (e^{c} =$$

$$|y| = c_1 e^{3x}$$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{3x}}}$$

Stemmer løsningen tro?

Den y vi har funnet, må passe inn i $\frac{dy}{dx} = 3y$

V.S : $y'(x) = 3c_1 e^{3x}$

H.S : $3y = 3c_1 e^{3x}$

V.S = H.S.

Eksempel

Et radioaktivt stoff nedbrytes proposjonalt med det som til enhver tid er igjen av stoffet. Halveringstiden er T [år], og vi starter med en mengde R_0. Finn et uttrykk for hvor mye vi har av stoffet til enhver tid.

"nedbrytes proposjonalt med ..."

$$\frac{dR}{dt} = -kR \qquad , k > 0 . \qquad (*)$$

"halveringstid..."

$$R(T) = \frac{R_0}{2} \qquad (\Delta)$$

"startmengde ..."

$$R(0) = R_0 \qquad (\Delta)$$

løser ligningen (*)

- ligningen er separabel :

$$\frac{dR}{R} = -k dt$$

- når alle R er på venstre side, og alle t på høyre, kan vi integrere :

$$\int \frac{dR}{R} = \int -k dt$$

$$\ln R = -kt + c$$

$$R = e^{-kt+c}$$

$$R = e^{-kt} \cdot e^{c} \qquad , e^{c} = c_1$$

$$R = ce^{-kt} \quad .$$

Nå skal vi bruke de to andre opplysningene (Δ) til å bestemme c og k :

- $R(0) = R_0 \Rightarrow \quad ce^{-k \cdot 0} = R_0$

$$c = R_0$$

$$R(t) = R_0 e^{-kt}$$

- $R(T) = \frac{R_0}{2} \Rightarrow \quad R_0 e^{-k \cdot T} = \frac{R_0}{2}$

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

$$-kT = \ln \frac{1}{2} \qquad \left(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b\right)$$

$$-kT = -\ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{T}$$

$$R(t) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \quad .$$

Å sette opp diffligninger

1) La $y(t)$ være en størrelse. Med endringsraten til y menes den deriverte dy/dt.
(Andre ord for dy/dt: vekstfarten til y, veksthastigheten til y, etc.)

2) At uttrykk 1 er proporsjonalt med uttrykk 2 betyr at det fins en konstant k slik at

$$(\text{uttrykk } 1) = k \cdot (\text{uttrykk } 2)$$

3) At uttrykk 1 er omvendt proporsjonalt med uttrykk 2 betyr at det fins en konstant k slik at

$$(\text{uttrykk } 1) = k / (\text{uttrykk } 2) .$$

Eksempel

Anta at q er en funksjon av t, og at teksten sier at "vekstfarten til q er proporsjonal med produktet av størrelsene q og $100-q$.

$$\frac{dq}{dt} = k \cdot q \cdot (100 - q) .$$