EKSAMEN, MA 1101/MA 101, 19/12 - 2007

Løsninger (med forbehold om skrive/regne-feil)

OPPGAVE 1:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \underline{\frac{4}{5}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x+\sqrt{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x/\ln x + 1/\sqrt{\ln x}} = \text{"} \frac{1}{\infty + 0} \text{"}$$

$$= \underline{0} \quad \text{siden} \quad \lim_{x\to\infty} x/\ln x = \infty$$

og $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{-1/2} = 0$

OPPGAVE 2:

$a > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \left[\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right]^{\frac{1}{a}}$$

$$= \left[\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{1/a} = \underline{e^{1/a}}$$

Grensen: $\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ regnes som kjent!

OPPGAVE 3:

Volumet av boksen blir:

$$V = \pi r^2 \cdot h = 1$$

der r er radien i bunnen og h er höyden av sylinderen. Altså får vi:

$$h = 1/\pi r^2$$

Prisen pr. enhetsareal for bunnen betegnes p.
—"— —"— —"— —"— sideflaten blir da 2p.
Prisen for hele boksen blir dermed:

Oppg. 3 (forts.)

$$P(r) = \pi r^2 \cdot p + 2\pi \cdot r \cdot h \cdot 2p$$
$$= \pi p \left[r^2 + 4r / \pi r^2 \right]$$

Vi får da:

$$P'(r) = \pi p \left[2r - 4/\pi r^2 \right] = 0$$

når: $r = \frac{2}{\pi r^2}$ eller $r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

For høyden har vi da:

$$h = 1/\pi r^2 = \left(\frac{1}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} = \underline{\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/3}}$$

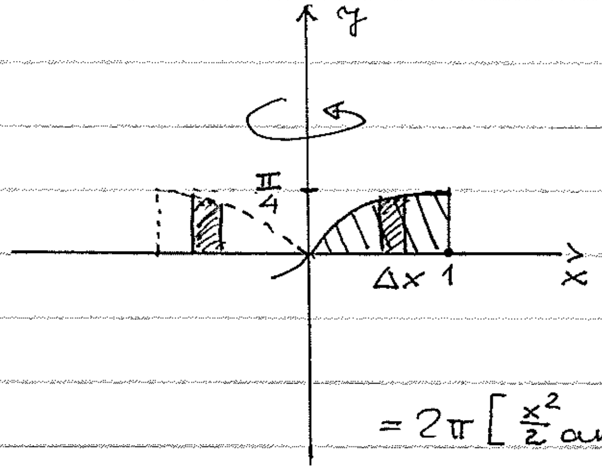
Siden $P(r) \to \infty$ når $r \to 0$ og når $r \to \infty$, må ovenstående r-verdi gi globalt minimum for prisen.

<u>OPPGAVE 4:</u>

$$f(x) = x \arctan x$$
$$f'(x) = \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1+x^2 + 1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \underline{\frac{2}{(1+x^2)^2}}$$

Siden $f''(x) > 0$ for alle reelle x, krummer kurven oppover. Vi har m.a.o. en konveks kurve.

OPPGAVE 5:



$f(x) = \arctan x\,;\ 0 \le x \le 1$.

Sylindermetoden gir:

$$V = 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right] \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \arctan 1 - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x \right] \Big|_0^1 \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = \underline{\frac{\pi^2}{2} - \pi}$$

OPPGAVE 6:

Vi bestemmer A, B, C slik at:

$$\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \equiv \frac{4x+8}{(x+1)^2(x+3)}$$

Dette gir:

$$A(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)^2 \equiv 4x+8$$

eller:

$$Ax + 3A + Bx^2 + 4Bx + 3B + Cx^2 + 2Cx + C \equiv 4x + 8$$

Dette gir ligningssystemet:

$$B + C = 0 \qquad C = -B$$

$$A + 4B + 2C = 4 \qquad A + 2B = 4$$

$$3A + 3B + C = 8 \qquad 3A + 2B = 8$$

$$2A = 4, \quad A = 2, \quad 2B = 4 - 2 = 2$$

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = -1$$

Altså:
$$\int \frac{4x+8}{(x+1)^2(x+3)} dx = \int \frac{2\,dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+3}$$

Oppg. 6 (forts.)

$$= -\frac{2}{(x+1)} + \ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + K$$

OPPGAVE 7:

(i) Anta at $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ er konstant. For et vilkårlig punkt $x = x_0 \in (a,b)$ har vi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0 = f'(x_0)$$

(ii) Anta at $f'(x) = 0$ for hver $x \in (a,b)$. La $a < x_1 < x_2 < b$. Da er f kontinuerlig på $[x_1, x_2]$ og deriverbar i (x_1, x_2). I følge sekantsetningen finnes det da et $c \in (x_1, x_2)$ slik at:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Siden $f'(c) = 0$ må $f(x_1) = f(x_2)$. Altså er funksjonen konstant på (a,b).

OPPGAVE 8:

(a) Hvis laksebestanden er konstant, må

$B(t) \equiv B(0) = 50$ og $B'(t) = 0$.

Dette siste gir at

$$0.3 \cdot B(t) - r = 0$$

eller: $\underline{r} = 0.3 \cdot B(0) = \underline{15 \text{ tonn / år}}$

(b) $r > 15$; differensiallikning er separabel:

$$\frac{dB}{dt} = 0.3\,B - r$$

eller:

$$\int \frac{dB}{0.3B - r} = \int dt$$

$$\frac{10}{3} \ln(0.3B - r) = t + C$$

Oppg. 8 (forts.)

Av dette følger:

$$\ln(0.3B - r) = 0.3t + C'$$

eller

$$0.3B - r = Ke^{0.3t}$$

$$B(t) = \frac{10}{3}(r + Ke^{0.3t})$$

$B(0) = 50$ gir så:

$$50 = \frac{10}{3}(r + K)$$

$$K = 15 - r$$

Altså:

$$B(t) = \frac{10}{3}\left(r + (15-r)e^{0.3t}\right)$$

Det tidspunkt da laksebestanden dør ut betegner vi med t_0. Altså:

$$0 = B(t_0) = \frac{10}{3}\left(r + (15-r)e^{0.3t_0}\right)$$

eller:

$$r - (r-15)e^{0.3t_0} = 0$$

$$e^{0.3t_0} = r/(r-15)$$

$$\underline{t_0 = \frac{10}{3}\ln\left(\frac{r}{r-15}\right)}$$

OPPGAVE 9:

Den tilhørende algebraiske ligning blir:

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \quad , \quad r = -1 \pm 2i$$

Den allmenne løsning blir dermed:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Videre har vi $y(0) = 0$ som gir:

$$0 = e^0(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) \quad \therefore \quad C_1 = 0$$

$$y = C_2 e^{-x} \sin 2x \quad , \quad y' = C_2(-e^{-x}\sin 2x + e^{-x} 2\cos 2x)$$

Vi må ha $y'(0) = 2$. Dette gir:

$$2 = y'(0) = C_2(-1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1)$$

som gir: $C_2 = 1$. Løsningen blir dermed:

$$\underline{y = e^{-x} \sin 2x}$$