

Faglig kontakt: Kari Hag (73 59 35 21, 48 30 19 88) Studentnr. _____

Semesterprøve i MA1101 den 12.10.07
Tid: 90 min. Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

DEL I

Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål i del I. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. Det reelle tallet $(1 + \cos \frac{\pi}{4})^2 - \sqrt{2}$ er lik
☐ et irrasjonalt tall ☐ 0 ☐ 1 ☒ $\frac{3}{2}$
2. Anta at vi multipliserer ut uttrykket $(1 - b)^7$. Hva blir koeffisienten til b^4 ?
☐ - 35 ☒ 35 ☐ - 21 ☐ 21
3. Vi definerer tallmengden $A = \{x_n\}$ ved $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}$, $n \geq 1$. Da gjelder
☒ $\sup A = 2$ ☐ $\sup A = \frac{3}{2}$ ☐ $\inf A = 0$ ☐ A ikke begrenset

4. Vi skal bruke definisjonen av konvergens til å vise at følgen $\{a_n\}$ gitt ved $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n}$ konvergerer mot 1. Så gitt en vilkårlig $\varepsilon > 0$, hvor stor må N være for at $|a_n - 1| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$?

☐ Større enn $\max\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ ☐ Større enn $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ☐ Større enn $\frac{1}{\varepsilon}$ ☒ Større enn $\frac{1}{\varepsilon^2}$
5. Den deriverte til funksjonen $f(x) = \frac{x^2}{\tan x}$ er
☐ $\frac{2x}{\tan x}$ ☐ $\frac{2x}{\cos^2 x}$ ☐ $\frac{-2x}{\sin^2 x}$ ☒ $\frac{x \sin 2x - x^2}{\sin^2 x}$
6. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin ax)^{\frac{1}{x}}$ er lik
☐ 1 ☐ $e^{\frac{1}{a}}$ ☐ e ☒ e^a
7. Funksjonen $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 7x - 5$ er konkav (nedover) på intervallet
☒ $[1, 4]$ ☐ $[-4, 1]$ ☐ $(-\infty, -1]$ ☐ $[1, \infty)$

8. I en likebeint trekant er de to like lange sidene 2 cm hver. Hva er det største arealet trekanten kan ha?

☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☒ 2 ☐ $2\sqrt{2}$

DEL II

Her skal du begrunne svaret ditt, og ta med nødvendige mellomregninger.

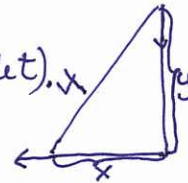
9. Johan har en 4 meter lang stige som står opptil en vegg på et flatt underlag. Foten av stigen sklir bort fra vegg med konstant fart på 0.5 m/s. Hvor fort beveger toppen av stigen seg når den er 2 meter over bakken?

Har (*) $x(t)^2 + y(t)^2 = 4^2$ (alle t),

og $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$ (alle t).

Eller, da $x'(t) = 0.5$:

(**) $x(t) + 2y(t)y'(t) = 0$ (alle t).



Ved tidspunktet t_1 , si, er $y(t_1) = 2$ og vi skal finne $y'(t_1)$.

Av (*) følger $x(t_1)^2 = 16 - 4 = 12$; $x(t_1) = 2\sqrt{3}$

For $t = t_1$ blir (**) derfor $2\sqrt{3} + 2 \cdot 2 y'(t_1) = 0$
slik at $y'(t_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (-tegn da y minker)

Svar: $\sqrt{3}/2$ m/s

10. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0; \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$. Er funksjonen kontinuert i $x = 0$?

f er deriverbar i $x = 0$ dersom $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ eksisterer. Her:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \left(\cos \frac{1}{h} \right) = 0$$

(går mot 0 begrenset faktor: $|\cos \frac{1}{h}| \leq 1$)

$f'(0) = 0$

Funksjonen er kontinuert i 0 da deriverbar i 0.