Notat til seksjon 10.5

Utledning av formlene uten bruk av komplekse tall

Vi skal studere løsningene til

$$\text{(D)} \qquad y'' + py' + qy = 0$$

der $p, q \in \mathbb{R}$.

Observerer: Dersom y_1, y_2 er løsninger av (D), så er også $Cy_1 + Dy_2$ løsninger av (D). (Se om nødvendig beviset øverst på s. 530 hos Lindstrøm.)

Reelle eksponentialløsninger av (D)

Husk: $y' + by = 0 \iff y = Ce^{-bx}$

Vi prøver derfor om $y = e^{rx}$ kan være en løsning av (D). Innsatt får vi

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

eller den *karakteristiske ligning*

$$\text{(K)} \qquad r^2 + pr + q = 0$$

Ser på tilfellene

(I) $p^2 - 4q > 0$
(K) har løsninger $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ og $y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ er løsninger av (D).

(II) $p^2 - 4q = 0$
(K) har dobbeltrot $r = -\frac{p}{2}$ og $y = Ce^{-\frac{p}{2}x}$ er løsninger av (D).

(III) $p^2 - 4q < 0$
(K) har ingen reelle røtter.

Alle løsninger i tilfellene (I) og (II)

Enhver løsning av y i (D) kan skrives som $y = ue^{rx}$, $\quad u = ye^{-rx}$, der vi lar r være en rot i (K). Men har denne faktoriseringen noe for seg?

Vi setter $y = ue^{rx}$ inn i (D) og får

$$y'' + py' + qy = u'' + (2r + p)u' + r^2 + pr + q = 0$$

eller

$$(*) \qquad u'' + (2r + p)u' = 0$$

da $r^2 + pr + q = 0$.

(II) Her er $r = -\frac{p}{2}$ slik at $(*)$ blir

$$u'' = 0 \iff (u')' = 0 \iff u' = A \iff u = Ax + B$$

Altså er alle løsninger gitt ved

$$\underline{y = (Ax + B)e^{rx}, \text{ der } r = -\frac{p}{2}}$$

(I) La $r = r_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$$u'' + (2r_1 + p)u' = 0$$

Her er $2r_1 + p = \sqrt{p^2 - 4q} = r_1 - r_2$

$$(u')' + (r_1 - r_2)u' = 0 \iff u' = Ee^{(r_2-r_1)x} \iff u = Fe^{(r_2-r_1)x} + G$$

Altså er alle løsninger gitt ved

$$\underline{y} = \left(Fe^{(r_2-r_2)x} + G\right) e^{r_1 x} = \underline{Fe^{r_2 x} + Ge^{r_1 x}}$$

Løsningene i tilfellet (III)

Når $p^2 - 4q < 0$ har vi ved å fullføre kvadratet i (K)

$$r^2 + pr + q = \left(r + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = 0$$

Det enkleste tilfellet av denne typen er (K)

$$r^2 + 1 = 0$$

svarende til (D)

$$y'' + y = 0$$

Her er det klart at $y = \sin x$, $y = \cos x$ er løsninger. Mer generelt er $y = \sin(bx)$, $y = \cos(bx)$ løsninger av

$$(**) \qquad y'' + b^2 y = 0$$

med (K) $r^2 + b^2 = 0, \quad b \neq 0$.

Dermed er også $y = A\sin(bx) + B\cos(bx)$ løsninger. Men utgjør disse alle? Det kan vises som før ved å sette $y = u\sin(bx)$ i $(**)$.

Tilfellet $p \neq 0$ i (K)

(K) kan da skrives på formen

$$\left(r + \frac{p}{2}\right)^2 + b^2$$

der $b^2 = \frac{4q-p^2}{4} > 0$.

Hvordan kan vi bli kvitt p i (D) og dermed i (K)? Innfører en ny variabel v gitt ved $y = e^{ax}v$. Innsatt i (D) får vi

$$y'' + py' + qy = \left[v'' + (2a+p)v' + (a^2 + pa + q)v\right] e^{ax} = 0$$

Med $a = -\frac{p}{2}$ blir differensialligningen med den nye variablen v

$$v'' + b^2 v = 0 \iff v = A\sin(bx) + B\cos(bx)$$

Siden $y = e^{ax}v$ følger da

$$\underline{y = Ae^{ax}\sin(bx) + Be^{ax}\cos(bx)}$$

Sluttresultat (også på formelarket)

$$y'' + py' + qy = 0:$$

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis } r_1 \neq r_2 \text{ røtter i karakteristisk ligning} \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis } r \text{ dobbeltrot i karakteristisk ligning} \\ Ce^{ax}\cos(bx) + De^{ax}\sin(bx) & \text{hvis kar. lign. } (r-a)^2 + b^2 = 0,\ b \neq 0 \end{cases}$$

Korollar Dersom $x_0, c, d \in \mathbb{R}$ er vilkårlige tall, så finnes det nøyaktig en løsning av $y'' + py' + qy = 0$ slik at $y(x_0) = c,\ y'(x_0) = d$.

(Får ved innsetting et system med to ligninger i c og d. Systemet har entydig bestemt løsning.)

Eksempler

Oppgave 10.5.2

a) $y'' - 2y' + y = 0$
(K) $r^2 - 2r + 1 = 0;\ r = 1$ er dobbeltrot.
Fra tabell: $\underline{y = Ce^x + Dxe^x}$

c) $y'' + 16y = 0$
(K) $r^2 + 16 = 0$ eller $(r-0)^2 + 4^2 = 0$.
Fra tabell: $\underline{y} = Ce^{0x}\cos(4x) + De^{0x}\sin(4x) = \underline{C\cos(4x) + D\sin(4x)}$

Oppgave 10.5.3

c) $y'' - 4y' - y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1$
La oss først løse oppgaven med $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.

(K) $$r^2 - 4r - 1 = 0; \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Fra tabell

(L) $$y = Ce^{(2+\sqrt{5})x} + De^{(2-\sqrt{5})x}$$

og

$$y' = (2+\sqrt{5})Ce^{(2+\sqrt{5})x} + (2-\sqrt{5})De^{(2-\sqrt{5})x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 2 \iff C + D = 2 \\ y'(0) = -1 \iff (2+\sqrt{5})C + (2-\sqrt{5})D = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ D = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Tilbakesubstitusjon i (L) gir da

$$\underline{y = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{(2+\sqrt{5})x} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{(2-\sqrt{5})x}}$$

Så tilbake til $y(1) = 2,\ y'(1) = -1$.
Generell løsning kan også skrives som

$$(\mathrm{L}_1) \qquad y = Ae^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + Be^{(2-\sqrt{5})(x-1)}$$

Da vil vi som over finne at $y(1) = 2$ og $y'(1) = -1$ gir $A = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ og $B = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Med disse verdiene innsatt i den generelle løsningen får vi

$$\underline{y = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{(2+\sqrt{5})(x-1)} + \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{(2-\sqrt{5})(x-1)}}$$

(Ekstra: Prøv å løse oppgaven uten å bruke formen (L_1).)