

Løsningsforslag til semesterprøve i MA1101, høst 2006

1. Det reelle tallet $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$ er lik

☐ et irrasjonalt tall ☐ 0 ☐ 1 ☐ et rasjonalt tall $\neq 0, 1$

Riktig svar: et irrasjonalt tall.

Begrunnelse: $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$ som er et irrasjonalt tall.

(Var $\sqrt{2} + 1$ rasjonalt, ville $(\sqrt{2} + 1) - 1 = \sqrt{2}$ også være det. Men $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall!)

2. Tallfølgen $\{a_n\}$ definert ved $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, er

☐ divergent ☐ voksende, men ikke strengt voksende ☐ voksende og begrenset
☐ voksende og ubegrenset

Riktig svar: voksende og begrenset.

Begrunnelse: Da $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, må $\{a_n\}$ være voksende. Videre er $a_n < 3$ for alle n .

Vises ved induksjon: $a_1 = 1 < 3$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 3} = 3$. (Kunne også ha kommet fram til riktig svar ved eliminasjon: $\{a_n\}$ er strengt voksende så alternativ 2 er galt.

Følgen $\{a_n\}$ er divergent hvis og bare hvis $\{a_n\}$ er ubegrenset, og da det bare er ett riktig svaralternativ, må alternativ 1 og 4 være gale.)

3. Vi skal bruke definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 5x + 4$ er kontinuerlig i $x = 0$. Så gitt en vilkårlig $\varepsilon > 0$, hvor liten må δ være for at $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ når $|x - 0| < \delta$?

☐ Mindre enn $\frac{\varepsilon}{2}$ ☐ Mindre enn $\min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ ☐ Mindre enn $\frac{\varepsilon}{5}$ ☐ Mindre enn $\frac{\varepsilon}{4}$

Riktig svar: Mindre enn (eller lik) $\varepsilon/5$.

Begrunnelse: $|5x + 4 - 4| = |5x| < \varepsilon$ når $|x| = |x - 0| < \varepsilon/5$.

4. Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} x \arctan x & \text{når } x < 0 \\ \sin x & \text{når } x \geq 0 \end{cases}$.

Er (i) f kontinuerlig i $x = 0$? (ii) f deriverbar i $x = 0$?

☐ Både (i) og (ii) ☐ Ingen av delene ☐ (i), men ikke (ii) ☐ (ii), men ikke (i)

Riktig svar: (i), men ikke (ii).

Begrunnelse: Da $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \arctan x = 0 \cdot 0 = f(0)$, og $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$, er f kontinuerlig i $x = 0$. Men da

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \arctan h - 0}{h} = 0,$$

er f ikke deriverbar i $x = 0$.

5. La S betegne skjæringssetningen, E ekstremalverdisetningen og M middelve-disetningen. Hvis $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så følger alltid konklusjonen i

☐ S og E ☐ E og M ☐ E ☐ M

Riktig svar: E

Begrunnelse: Ekstremalverdisetningen gjelder alltid når $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. (Eksempel som viser at S og M ikke nødvendigvis gjelder er $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \boxed{|x|+1}$)

6. Når $x \rightarrow \infty$ har funksjonen $f(x) = xe^{1/x}$ asymptoten

☐ $y = x$ ☐ Den har ingen asymptote ☐ $y = x + 1$ ☐ $y = x + 2$

Riktig svar: $y = x + 1$

Begrunnelse: Vi bruker standardmetoden og observerer at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Dette betyr at for en eventuell asymptote $y = ax + b$, er $a = 1$. For å finne b ser vi på

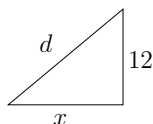
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = " \infty \cdot 0 " = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{t} = " \frac{0}{0} " = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t}{1} = 1. \end{aligned}$$

Altså er $y = x + 1$ asymptote når $x \rightarrow \infty$.

7. En radar er plassert i en høyde av 12 meter over en rett vei. I et bestemt øyeblikk er avstanden fra radaren til en bil på veien 37 meter og avtar med en fart på 21 m/s. Hvor fort kjører bilen?

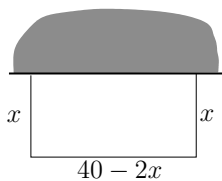
☐ 21 m/s ☐ 19,9 m/s ☐ 22,2 m/s ☐ 24 m/s

Riktig svar: 22,2 m/s (= 79,92 km/t)



Begrunnelse: Har $d(t)^2 = 12^2 + x(t)^2$ for alle t og $d(t)d'(t) = x(t)x'(t)$. Videre har vi gitt $d(t_0) = 37$, $d'(t_0) = -21$. Da er $x(t_0) = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35$, slik at $x'(t_0) = -\frac{37}{35} \cdot 21 = -\frac{37 \cdot 3}{5} = -\frac{37 \cdot 6}{10} = -22,2$. Bilen kjører altså med hastighet 22,2 m/s i det bestemte øyeblikket.

8. Kari skal lage en rektangulær innhegning til hesten sin. Den lange låveveggen skal være en side i innhegningen. På de tre andre sidene skal hun sette opp gjerde. Hva er det største arealet innhegningen kan ha når hun har materiale til 40 m gjerde?



Med betegnelser som på figuren blir $A = x(40 - 2x)$

Alt. 1 (prekalkulusløsning): Vi fullfører kvadratet og får

$$A = -2(x^2 - 20x + 10^2) + 200 = 200 - 2(x - 10)^2,$$

noe som viser at $A \leq 200$ og $A = 200$ for $x = 10$. Det største arealet er 200 m^2 .

Alt. 2: Vi ser på $A: [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$ der $A(x) = x(40 - 2x)$. $A'(x) = 40 - 4x = 0$ når $x = 10$. De kritiske punktene er altså $x = 0, x = 10, x = 20$. Da $A(0) = A(20) = 0$ blir maksimum $A(10) = 200$. Det største arealet er 200 m^2 .

Alt. 2': Vi ser på $A: (0, 20) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $A(x) = x(40 - 2x)$. $A'(x) = 40 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 10$. Da $A'(1) > 0$ og $A'(1) < 0$ blir $A(10)$ maksimum. Det største arealet er 200 m^2 .

9. a) $1 = 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ og $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Hypotese: summen av de n første oddetallene er n^2 .

b) $P_n : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Utsagnet P_1 er sant da $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 1 = 1^2$.

Nå er $P_k : \sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$, $P_{k+1} : \sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = (k + 1)^2$.

For å vise at P_{k+1} er sann når P_k er sann deler vi opp summen på venstre side i P_{k+1} slik at vi kan sette inn at P_k er sann:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Induksjonstrinnet er vist!