Ukens utfordring, uke 46

Espen Sande og Martin Strand

21.11.2007

1 p-utfordringen

Konstanten k i ligningen $t \cdot x'(t) = k$ viser sammenhengen mellom tiden t og hastigheten x'. Siden snøenmengden øker med en konstant rate, og brøtebilen fjerner snøen med konstant rate, vil farten reduseres når snømengden øker.

La snøen falle med raten r. Da blir snødybden $d = rt$ ved tiden t. Mengden snø som blir fjernet i øyeblikket $S'(t)$ kan da beskrives på to måter. For en plogbredde p, er endringen i sømengden på et tidspunkt $S'(t) = prtx'$. Samtidig vet vi at $S'(t) = c$ for en konstant c. Om da $k = c/pr$ har vi det som er gitt:

$$t \cdot x'(t) = k$$

Den gitte formelen kan også skrives som $x'(t) = \frac{k}{t}$. Vi antideriverer begge sider med hensyn på t, og får

$$x(t) = k \int \frac{1}{t} dt = k \ln t + C$$

La t_1 være tidspunktet bilen begynner å kjøre. De andre tidspunktene blir da $t_1 + 1$ og $t_1 + 3$, og vi setter opp:

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= k \ln t_1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -k \ln t_1 \\
x(t) &= k(\ln t - \ln t_1) \\
x(t_1 + 1) &= k \ln \left(\frac{t_1 + 1}{t_1} \right) = 5 \\
x(t_1 + 3) &= k \ln \left(\frac{t_1 + 3}{t_1} \right) = 10
\end{aligned}$$

Vi løser for k i de to siste, og kommer fram til

$$\ln\left(\frac{t_1+3}{t_1}\right) = 2\ln\left(\frac{t_1+1}{t_1}\right)$$
$$\ln\left(\frac{(t_1+1)^2}{t_1(t_1+3)}\right) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{(t_1+1)^2}{t_1(t_1+3)} = 1$$

Det gir likningen
$$t_1^2 + 2t_1 + 1 = t_1^2 + 3t_1$$
som løst for t_1 gir $t_1 = 1$. Det betyr at det begynte å snø nøyaktig en time før bilen kjørte ut – klokken 05:00.

2 P-utfordringen

Denne løsningen bygger til dels på forrige (heretter bare kalt (p)), så noen forklaringer er utelatt.

La $t = 0$ ved klokkeslettet 12:00, og t_0 være tidspunktet det begynner å snø. Utfordringen er å finne t_0.

La $x_{1,2}(t)$ være distansen bil 1 og 2 har kjørt ved tiden t. $t_1 - t_0$ er tiden siden det har snødd. Med samme begrunnelse som i (p) har vi da

$$x_1'(t) \cdot (t_1 - t_0) = k$$

Vi har $x_1'(t) = \frac{1}{t_1'(x)}$ og da er $t_1'(x) = \frac{t_1 - t_0}{k} \Rightarrow t_1' - \frac{1}{k}t_1 = -\frac{t_0}{k}$. Med $f(x) = -\frac{1}{k}$ og $F(x) = -\frac{1}{k}x$, gir det løsningen $t_1 = t_0 + Ce^{x/k}$. Siden bilen starter å kjøre ved $t = 0$, har vi initialverdien $t_1(0) = 0$. Vi setter inn og finner en ligning for $t_1(x)$:

$$t_1(0) = t_0 + C = 0 \Rightarrow C = -t_0$$
$$t_1(x) = t_0\left(1 - e^{x/k}\right) \tag{1}$$

Så går vi over til å finne ligningen for den andre bilen. Nå er tiden det har tatt fra veien var bar, til tidspunktet den andre bilen var på stedet gitt ved

$t_2 - t_1$. Med argumentasjon som over, har vi da

$$x_2'(t)(t_2 - t_1) = k$$
$$t_2'(x) = \frac{t_2 - t_1}{k} = \frac{t_2 - t_0\left(1 - e^{x/k}\right)}{k}$$
$$t_2' - \frac{t_2}{k} = -\frac{t_0}{k}\left(1 - e^{x/k}\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x/k} \cdot t_2\right) = -\frac{t_0}{k}\left(e^{-x/k} - 1\right)$$
$$e^{-x/k} \cdot t_2 = \int \left(-\frac{t_0}{k}e^{-x/k} + \frac{t_0}{k}\right) dx = t_0 e^{-x/k} + \frac{t_0}{k}x + C$$
$$t_2 = t_0 + \frac{t_0 x e^{x/k}}{k} + Ce^{x/k}$$

Den andre brøytebilen startet å kjøre ved $t = 1$. Derfor må $t_0(x) = 1$, og det gir $C = 1 - t_0$. Det gir endelig

$$t_2(x) = t_0 + \frac{t_0 x e^{x/k}}{k} + (1 - t_0)\, e^{x/k}$$

La stedet bilene kolliderer være x_3. $t_1(2) = t_2(2) = x_3$, eller mer interessant: $t_1(x_3) = t_2(x_3) = 2$. Vi har da to ligninger:

$$\begin{aligned} 2 &= t_0 - t_0 e^{x_3/k} \\ 2 &= t_0 + \frac{t_0 x_3 e^{x_3/k}}{k} + (1 - t_0)\, e^{x_3/k} \end{aligned}$$

Differansen mellom dem blir

$$0 = t_0 x_3 e^{x_3/k} + e^{x3/k} = \frac{t_0 x_3}{k} + 1$$

Da er $\frac{x_3}{k} = -\frac{1}{t_0}$. Satt inn i (1), får vi $2 = t_0 - t_0 e^{-1/t_0}$, som gir $t_0 \approx -0.80$. Tidspunktet det begynte å snø blir da 12.00 h - 0.80 h = 11.20 h, eller klokken 11:12.

3 T-utfordringen

Utelatt. Vi fant dessverre ikke tid til å fullføre denne på skikkelig vis. En aktuell løsningsmetode vi har diskutert går ut på å undersøke q når antallet intervaller går mot uendelig.