Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1101 Grunnkurs Analyse I
Høst 2018

Løsningsforslag — Øving : Midtsemester

1 Ekstremalpunkter inntreffer ved endepunkter, singulære punkter og kritiske punkter. Vi deriverer og får

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

Dermed har vi $f'(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Begge disse punktene er i intervallet $[-1, 2]$. Det er ingen singulære punkter. Vi sammenlikner funksjonverdiene i de potensielle ekstremalpunktene $-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 2$:

$$\begin{aligned}
&f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 4 = 5 \\
&f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = (-\sqrt{\frac{2}{3}})^3 - 2(-\sqrt{\frac{2}{3}}) + 4 = \frac{4}{9}(\sqrt{6} + 9) \approx 5.08 \\
&f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = (\sqrt{\frac{2}{3}})^3 - 2(\sqrt{\frac{2}{3}}) + 4 = \frac{4}{9}(9 - \sqrt{6}) \approx 2.9 \\
&f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 4 = 8
\end{aligned}$$

Dermed ser vi at globalt maksimum finner sted i $(2, 8)$ og globalt minimum finner sted i $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{9}(9 - \sqrt{6}))$.

2 Merk først at f er kontinuerlig på $(0, \infty)$ siden det er en sum av to kontinuerlige funksjoner på $(0, \infty)$. Vi kan derfor bruke skjæringssetningen. Vi har

$$\begin{aligned}
f(1/10) &= \frac{1}{10} + \ln\frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \ln 10 < 0 \\
f(1) &= 1 + \ln 1 = 1 > 0
\end{aligned}$$

så det følger av skjæringssetningen at det f har et nullpunkt mellom $1/10$ og 1. Videre er

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

så $f'(x) > 0$ for alle $x \in (0, \infty)$. Det følger at det kun er ett nullpunkt på $(0, \infty)$.

3 Funksjonen $f(x) = \sin x$ er kontinuerlig deriverbar på hele $\mathbb{R}$ med $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$. Fra skjæringssetningen får vi da, for $x \neq y$, at det finnes c mellom x og y slik at

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos c| \leq 1$$

hvor siste ulikhet holder siden $|\cos c| \leq 1$ for alle $c \in \mathbb{R}$. Ved å multiplisere med $|x-y|$ på begge sider får vi nå

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

for $x \neq y$. Dersom $x = y$ holder utsagnet trivielt, siden $0 \leq 0$. Dette beviser påstanden.

$\boxed{4}$ Definisjonen av den deriverte gir

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{2} = 0 \end{aligned}$$

hvor vi har brukt L'Hôpitals regel to ganger ovenfor på 0/0-uttrykk. Det følger at $f'(0) = 0$.

$\boxed{5}$ Anta at f er kontinuerlig i origo, og la $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Per antakelse finnes det da $\delta > 0$ slik at for $|x-0| = |x| < \delta$ så er $|\cos\frac{1}{x} - f(0)| = |\cos\frac{1}{x} - 0| = |\cos\frac{1}{x}| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. La nå $k \in \mathbb{N}$ være så stor at $\frac{1}{2\pi k} < \delta$. For $x = \frac{1}{2\pi k}$ er da $|x| < \delta$, men

$$|f(x) - f(0)| = |\cos\frac{1}{x}| = |\cos\frac{1}{\frac{1}{2\pi k}}| = |\cos 2\pi k| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

som er en motsigelse. Det følger at f er diskontinuerlig i origo.