NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 11. desember 2018

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Vektingen av hver oppgave er angitt i oppgaven. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser (obs. gjelder ikke Oppgave 1). Tegn gjerne. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 *(20p)*

Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Marker på eget svarspapir med ‹‹Sann›› / ‹‹Usann›› / ‹‹Kan ikke avgjøres››. Begrunnelse trenges ikke.

(i) cos er en like (jevn) funksjon.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$.

(iii) Funksjonen $x \mapsto x^3$ er overalt strengt voksende.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

(v) En gitt kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0$ er deriverbar i origo.

(vi) Differensiallikningen $y' + x^2 y = 0$ er separabel.

(vii) $\ln(1+x) = x - \mathcal{O}(x^2)$ for x nært 0.

(viii) Enhver begrenset funksjon har et globalt maksimum.

(ix) Dersom $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ eksisterer er f deriverbar i x_0.

(x) Enhver kontinuerlig deriverbar (C^1) funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er også uniformt kontinuerlig.

Oppgave 2 *(10p)*

Integrer følgende uttrykk.

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $(\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2})$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

Oppgave 3 *(10p)*

Funksjonen $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

kan skrives på formen $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(i) Bestem koeffisientene a_k, for alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) Beregn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x)}{x^3}.$$

Oppgave 4 *(10p)*

For følgende funksjoner, avgjør hvorvidt de er (1) surjektive, (2) injektive, (3) inverterbare på de mengdene som er angitt i oppgaven.

(i) $x \mapsto x + x^3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) $x \mapsto \cos(x) \colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (0, 1]$

Oppgave 5 *(10p)*

(i) Finn alle kritiske punkter til funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}.$$

(ii) Lokalisér eventuelle globale maksima og minima til f og avgjør hvor funksjonen er voksende/avtagande. Bestem eventuelle asymptoter når $x \to \pm\infty$.

Oppgave 6 *(10p)*

Forenkle

$$\sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

For hvilke verdier av x konverger $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$?

Oppgave 7 *(10p)*

Funksjonen $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ er glatt (C^∞) og derfor kontinuerlig. Vis at den også er uniformt kontinuerlig.

Oppgave 8 *(10p)*

Betrakt, for $x \geq 0$, initialverdiproblemet

$$y'(x) - 6x\,y(x) = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{$*$}$$

(i) Løsningen $x \mapsto y(x)$ til $(*)$ har en invers $y \mapsto x(y)$, $y \geq 1$. Formulér initialverdiproblemet tilsvarende $(*)$, men for den inverse funksjonen $x = x(y)$.

(ii) Bestem løsningen y og dens invers.

Oppgave 9 *(10p)*

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon med

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq B,$$

for et endelig tall B. Vis ved et ε/δ-argument at funksjonen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

er kontinuerlig i hvert punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Et bevis uten ε/δ gir maksimalt halv uttelling.