NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse**

Fagleg kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 73 59 17 44

Eksamensdato: 11. desember 2018

Eksamenstid (frå–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D: Ingen andre trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillaten (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annan informasjon:
Vektinga av kvar oppgåve er gjeven i sjølve oppgåva. Les igjennom alle oppgåvene før du byrjar; den opplevde vanskegraden er ikkje naudsynt i stigande rekkefølgje. Skriv tydeleg og eintydig, og grunngje berekningane/prova dine (obs. gjeld ikkje Oppgåve 1). Teikn gjerne. Spør dersom noko er uklårt.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
svart/kvit ☒ **fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐

Dato Sign

Oppgåve 1 *(20p)*

Kva av følgjande utsagn er korrekte? Markér på eige svarark med "Sann" / "Usann" / "Umogleg å avgjere". Ein treng ikkje å grunngje svaret.

(i) cos er ein like (jamn) funksjon.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$.

(iii) Funksjonen $x \mapsto x^3$ er overalt strengt veksande.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

(v) Ein gjeve kontinuerleg funksjon med $f(0) = 0$ er deriverbar i origo.

(vi) Differensiallikninga $y' + x^2 y = 0$ er separabel.

(vii) $\ln(1 + x) = x - \mathcal{O}(x^2)$ for x nærme 0.

(viii) Kvar avgrensa funksjon har eit globalt maksimum.

(ix) Dersom $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ eksisterer er f deriverbar i x_0.

(x) Kvar kontinuerleg deriverbar (C^1) funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er òg uniformt kontinuerleg.

Oppgåve 2 *(10p)*

Integrér følgjande uttrykk.

(i) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$$

(ii) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$$

(iii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Oppgåve 3 *(10p)*

Funksjonen $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gjeve ved

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

kan skrivast på formen $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(i) Bestem koeffisientane a_k, for alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) Berekn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x)}{x^3}.$$

Oppgåve 4 *(10p)*

For følgjande funksjonar, avgjer om dei er (1) surjektive, (2) injektive, (3) inverterbare på dei mengdene som er gjeve i oppgåva.

(i) $x \mapsto x + x^3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) $x \mapsto \cos(x)\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (0, 1]$

Oppgåve 5 *(10p)*

(i) Finn alle kritiske punkt til funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gjeve ved

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}.$$

(ii) Lokalisér eventuelle globale maksimum og minimum til f og avgjer kvar funksjonen er veksande/minkande. Bestem eventuelle asymptoter når $x \to \pm\infty$.

Oppgåve 6 *(10p)*

Forenkle

$$\sum_{k=0}^{n} x^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

For kva verdier av x konverger $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$?

Oppgåve 7 *(10p)*

Funksjonen $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ er glatt (C^∞) og derfor kontinuerleg. Vis at han òg er uniformt kontinuerleg.

Oppgåve 8 *(10p)*

Vurdér, for $x \geq 0$, initialverdiproblemet

$$y'(x) - 6x\, y(x) = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{$*$}$$

(i) Løysinga $x \mapsto y(x)$ til $(*)$ har ein invers $y \mapsto x(y)$, $y \geq 1$. Formulér initialverdiproblemet tilsvarande $(*)$, men for den inverse funksjonen $x = x(y)$.

(ii) Bestem løysniga y og inversen til ho.

Oppgåve 9 *(10p)*

La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vere en funksjon med

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq B,$$

for eit endeleg tal B. Vis ved eit ε/δ-argument at funksjonen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gjeve ved

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$$

er kontinuerleg i kvart punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Eit prov utan ε/δ gjev maksimalt halvparten av poenga.